I.S.F.D N°2 (Chos Malal)

Profesorado de educación secundaria en matemática

INGRESO 2024

Material didáctico perteneciente al "Módulo de Matemática" de la facultad de Ingeniería - U.N.Co

GLOSARIO DE SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

DESIGUALDADES

$<$	Se lee: "menor que…"	$>$	Se lee: "mayor que…"
$\leq$	Se lee: "menor o igual que…"	$\geq$	Se lee: "mayor o igual que…"

CONJUNTOS

$\in$	Se lee: "Pertenece"	$\notin$	Se lee: "No pertenece"
$\cup$	Se lee: "Unión"	$\cap$	Se lee: "Intersección"
$\subset$	Se lee: "Subconjunto de"	$\subseteq$	Se lee: "Subconjunto de o igual a"
$\emptyset$	Se lee: "Vacío"	∞	Se lee Infinito y **no** denota un número real determinado
$+\infty$	Se lee "más infinito" o "infinito positivo"	$-\infty$	Se lee "menos infinito" o "infinito negativo"

LÓGICAS

/	Se lee: "tal que…"	$\forall$	Se lee: "para todo…"
$\wedge$	Se lee: "y"	$\vee$	Se lee: "o"
$\exists$	Se lee: "Existe…"		
$\Rightarrow$	Se lee: "si…entonces"	$\Leftrightarrow$	Se lee: "…si y solo si…"

CONJUNTOS NUMÉRICOS

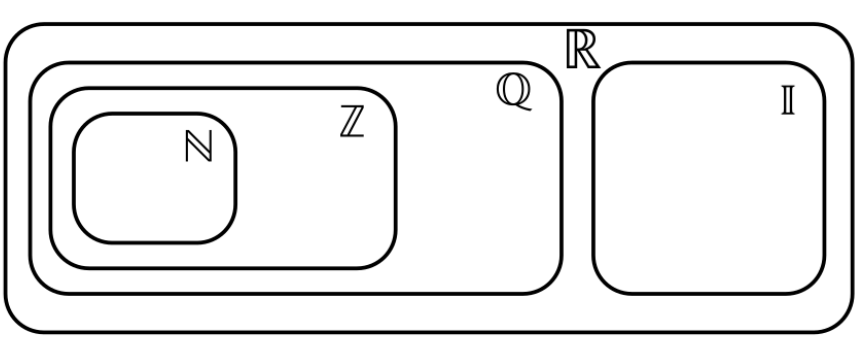
N	Naturales	Z	Enteros
Q	Racionales	I	Irracionales
R	Reales	C	Complejos

UNIDAD 1 - NÚMEROS REALES

ANOTADOR DE CONSULTAS

a. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

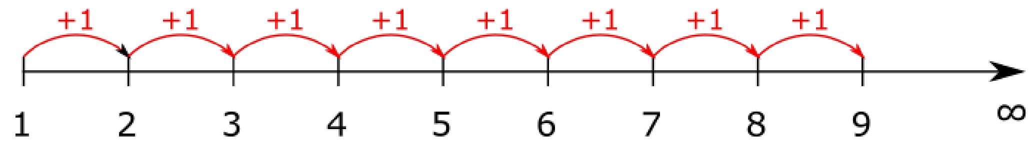
El conjunto de los números reales que suele denotarse con la letra R , está compuesto a su vez por otros subconjuntos denominados: números naturales (N), números enteros (Z), números racionales (Q) y los números irracionales (I). En la imagen 1, se muestra un esquema con la composición del conjunto de los números reales; nótese que por ejemplo el conjunto Z, está compuesto a su vez por los números del conjunto N.



1.1 NÚMEROS NATURALES

Fue el primer conjunto de números del que se tiene registro y surgió de la necesidad de contar objetos. Es por esto que este conjunto es discreto (pasa, por ejemplo, del número 1 al número 2 sin que existan valores intermedios), comienza en el número 1 y no incluye el número cero ya que no era necesario contar objetos que “no existieran”.

Estos números, como todos los reales, están ordenados lo que nos permite representarlos sobre una semi-recta como la que se muestra en la imagen 2.

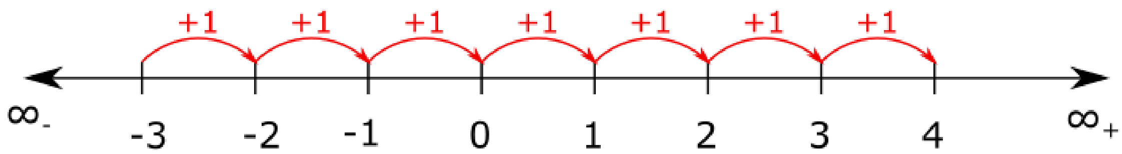


Este conjunto puede escribirse como:

$$N = \{1,2,3, \dots , n, n+1, \dots\}$$

1.2 NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los números enteros, surgió de la necesidad de registrar deudas (números negativos) y cuando éstas se cancelaban, tener algún símbolo que indicara que no se debía más nada (número cero). Esto también soluciona el problema de la resta del tipo $a - b$ cuando ambos número son naturales y además $b \geq a$. De este modo se genera una recta numérica que es infinita tanto para la izquierda como para la derecha, pero sigue siendo discreta.



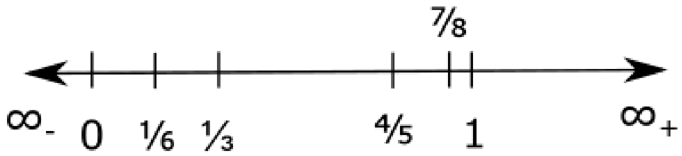
Formalmente, los números enteros pueden ser representados de la siguiente manera:

$$Z = \{\dots , n-1, n, \dots , -3, -2, -1,0,1,2,3, \dots , n, n+1, \dots\}$$

Un número negativo puede ser considerado como un número natural multiplicado por (-1).

1.3 NÚMEROS RACIONALES

Con el avance de las operaciones numéricas se introdujo el concepto de división entre números enteros, operación que, a diferencia de la suma, resta y multiplicación (entre enteros), puede dar como resultado valores intermedios (fracciones o números con decimales). De este modo se introduce el conjunto de los números racionales denominado con la letra Q y que genera que existan entre dos enteros una infinita cantidad de números intermedios. Esto hace que Q sea un conjunto denso.



Formalmente, este conjunto puede denotarse como:

$$Q = \left\{\frac{m}{n}, m, n \epsilon Z, n \neq 0\right\}$$

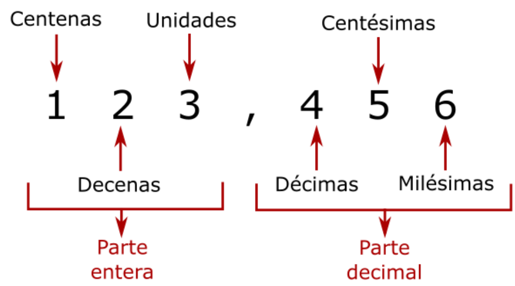
Nótese que n es un número entero distinto de cero, esto se debe a que **no se encuentra definida la división por el número cero.** Además, esta definición deja en claro de un número racional se puede obtener de la división de dos números enteros.

Este conjunto numérico, puede ser escrito como fracción o como un número con decimales. Por ejemplo:

Número como fracción	Número como decimal
$-\frac{1}{4}$	$-0{,}25$
$\frac{2}{3}$	$0{,}6\hat{6}$
$\frac{1}{100}$	$0{,}01$

1.3.1 Números racionales escritos en forma decimal

Los números decimales son aquellos que cuentan con una parte entera y, luego de una coma, una parte decimal como se muestra en la imagen a continuación.



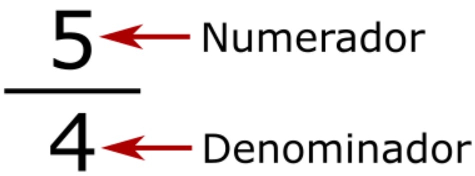
En Argentina, se separa la parte entera de su número por la decimal por medio de la coma "," y los miles con punto ".". Muchos programas y calculadoras son de origen extranjero y utilizan esta notación invertida.

Estos números se pueden clasificar en:

Tipo	Características	Ejemplo
Números enteros	*No tienen parte decimal*	2
Números decimales exactos	*Tienen parte decimal finita*	$2{,}25$
Números periódicos	*Su parte decimal es infinita y sólo periódica*	$2,\hat{3} = 2{,}3333$ ....
Números periódicos mixtos	*Su parte decimal es infinita, pero no completamente periódica*	$-2{,}2\hat{4} = -2{,}244$ ...

1.3.2 ¿Cómo escribir un número como fracciones?

Una fracción representa una división donde el numerador es el dividendo y el denominador es el divisor.



Hay divisiones que son entre distintos números pero dan el mismo resultado, por ejemplo $\frac{4}{2} = 2$ y $\frac{10}{5} = 2$, se dice entonces que las fracciones que denotan esa división son equivalentes; en la práctica siempre se debe expresar la fracción con la mínima expresión posible. Para esto, se divide numerador y denominador por un común divisor, en caso de no haber, se ha llegado a la mínima expresión que se llama **fracción irreducible**. Por ejemplo:

$$\frac{12}{9} = \frac{12:3}{9:3} = \frac{4}{3}$$

1.3.3 Transformar una fracción a un número decimal

Para expresar una fracción como número decimal, basta con resolver la división de forma manual o con la calculadora.

1.3.4 Transformar decimales a fracción

1.3.4.1 Números enteros

Los números enteros son fracciones con el denominador igual a 1. Por ejemplo:

$$4 = \frac{4}{1} \qquad\qquad -10 = \frac{-10}{1}$$

1.3.4.2 Números decimales exactos

Un decimal exacto se convierte en fracción colocando en el numerador toda la expresión decimal sin comas y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el número.

$$5{,}3 = \frac{53}{10} \qquad 0{,}05 = \frac{5}{100} = \frac{5:5}{100:5} = \frac{1}{20} \qquad -0{,}108 = -\frac{108}{1000} = -\frac{108:4}{1000:4} = -\frac{27}{250}$$

1.3.4.3 Números decimales periódicos puros

Estos números se convierten en fracción colocando en el numerador toda la expresión (sin comas) y restándole las cifras no periódicas. En el denominador, tantos nueves como cifras periódicas tenga la expresión. Por ejemplo:

$$1,\widehat{25} = \frac{125-1}{99} = \frac{124}{99} \qquad\qquad 0,\hat{6} = \frac{6-0}{9} = \frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$

1.3.4.4 Números decimales mixtos a fracción

Se convierten a fracción colocando en el numerador toda la expresión numérica, menos las cifras no periódicas y en el denominador, tantos nueves como cifras periódicas tenga el número dado seguido de tantos ceros como cifras decimales no periódicas. Por ejemplo:

$$2{,}3\hat{7} = \frac{237-23}{90} = \frac{214}{90} = \frac{214:2}{90:2} = \frac{107}{45} \qquad\qquad 6{,}0\widehat{21} = \frac{6021-60}{990} = \frac{5931}{990} = \frac{5931:3}{990:3} = \frac{1987}{330}$$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.I

1) Encontrar la fracción irreducible

a) $\frac{12}{20} =$ **e)** $\frac{4}{28} =$ **i)** $\frac{5a}{25a} =$

b) $\frac{4}{9} =$ **f)** $\frac{110}{108} =$ **j)** $\frac{abc}{b} =$

c) $\frac{64}{128} =$ **g)** $\frac{1848}{3276} =$ **k)** $\frac{a(a+b)}{(a+b)(a-b)} =$

d) $-\frac{11}{7} =$ **h)** $\frac{2352}{252} =$ **l)** $\frac{(2+4b)}{2c(1+2b)} =$

2) Convertir los siguientes números racionales de forma decimal a fracción

a) $0{,}001 =$ **d)** $-1,\hat{3} =$ **e)** $6{,}3\widehat{21} =$

b) $-0{,}107 =$ **e)** $7,\widehat{20} =$ **f)** $-5{,}25\widehat{13} =$

c) $0,\hat{5} =$ **f)** $0{,}00\widehat{35} =$ **g)** $0,\hat{9} =$

1.4 NÚMEROS IRRACIONALES

Si se observa la imagen donde se muestran los conjuntos, se puede ver que los números irracionales ($\mathbb{I}$) no contienen a los conjuntos vistos en los títulos anteriores. Esto sucede porque son números que tienen infinitas cifras decimales sin una regla de formación (sin ser periódicos), de forma que no pueden ser expresados como fracciones y por ende, como ninguno de sus subconjuntos.

Existen dos números irracionales conocidos y que los utilizarás reiteradamente a lo largo de tu carrera: el número pi ($\pi = 3{,}141592654\ldots$) y el número de Euler ($e = 2{,}718281828$). El resto de los números irracionales, son obtenidos a partir de las raíces cuyo resultado es real pero no es un número racional. Por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots \qquad \sqrt[3]{2} = 1{,}25992105\ldots$$

Queda entonces, con la unión de este conjunto, completa la recta numérica real.

2 OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

2.1 ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

La adición (suma) es una de las operaciones más elementales que se pueden realizar con números reales. Los elementos que se adicionan, se denominan sumandos y el resultado, total.

En este curso, se considerará la sustracción (resta) como una suma con alguno de los números negativos, de este modo, las propiedades mostradas en el cuadro a continuación, se aplican a ambas operaciones.

Propiedad	Definición	Ejemplos
Conmutativa	$a + b = b + a$	$5 + 2 = 2 + 5 = 7$ $5 + (-2) = 5 - 2 = -2 + 5 = 3$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(4 + 1) + 3 = 5 + 3 = 8$ ó $4 + (1 + 3) = 4 + 4 = 8$ $(4 - 1) + 3 = 3 + 3 = 6$ ó $4 + (-1 + 3) = 4 + 2 = 6$

Opuesto aditivo	$a+(-a)=0$	$\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)=0$ $-6+[-(-6)]=-6+6=0$
Neutro aditivo	$a+0=a$	$\frac{25}{3}+\frac{0}{1}=\frac{25}{3}$ $-35+0=-35$

2.1.1 Recordando suma de fracciones

Para realizar la suma de fracciones, es necesario que tengan todas el mismo denominador. Para conseguir esto, se busca el mínimo común múltiplo entre los denominadores y se lleva las fracciones a su equivalente con ese denominador. Por ejemplo:

- Si las fracciones tienen el mismo denominador, se pueden sumar directamente

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6}{3}=2$$

- Si las fracciones tienen denominadores que son múltiplo, sólo una de las fracciones se modifica

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

- Si las fracciones tienen denominadores que no son múltiplo, se debe buscar el mínimo común múltiplo

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$$

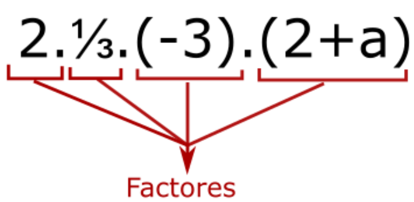
CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.II

1) Resolver las siguientes sumas

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=$	**e)** $\frac{13}{2}-\frac{20}{4}+2=$	**i)** $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=$
b) $\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=$	**f)** $\frac{3}{4}-\frac{7}{5}+\frac{3}{10}=$	**j)** $\frac{a}{b}+\frac{c}{a}=$
c) $\frac{11}{10}+\frac{2}{3}=$	**g)** $\frac{3}{2}-\frac{5}{3}-\frac{1}{4}=$	**k)** $\frac{a}{(b+d)}-\frac{c}{(b-d)}=$
d) $\frac{31}{21}-\frac{3}{4}=$	**h)** $\frac{1}{16}+\frac{2}{40}-\frac{2}{20}=$	**l)** $\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(b+c)}=$

2.2 MULTIPLICACIÓN O PRODUCTO

La multiplicación puede considerarse como suma reiterada y los números que se multiplican se llaman factores.



En el cuadro a continuación se muestran las propiedades de esta operación.

Propiedad	Definición	Ejemplo

Conmutativa	$a \cdot b = b \cdot a$	$5 \cdot 2 = 2 \cdot 5 = 10$ $5 \cdot (-2) = (-2) \cdot 5 = -10$
Asociativa	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(4 \cdot 1)3 = 4 \cdot 3 = 12$ ó $4(1 \cdot 3) = 12$ $[4 \cdot (-1)] \cdot 3 = -4 \cdot 3 = -12$ ó $4[(-1) \cdot 3] = 4 \cdot (-3) = -12$
Distributiva con respecto a la suma	$(a + b) \cdot c = ac + bc$	$(4 + 1) \cdot 3 = 5 \cdot 3 = 15$ ó $4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 12 + 3 = 15$ $(4 - 1) \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$ ó $4 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 12 - 3 = 9$
Inverso multiplicativo	$\frac{a}{b} * \frac{b}{a} = 1$	$-\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 2} = \frac{10}{10} = 1$
Neutro multiplicativo	$a \cdot 1 = a$	$8 \cdot \frac{2}{2} = 8 \cdot 1 = 8$
Multiplicación por cero	$a \cdot 0 = 0$	$5 \cdot 0 = 0$

2.2.1 Recordando multiplicación de fracciones

Al multiplicar fracciones, es conveniente que cada una esté en su mínima expresión. Luego, se puede simplificar “cruzado” (numerador con denominador y viceversa) y finalmente se multiplica “derecho” (numerador con numerador y denominador con denominador). Por ejemplo:

$$5 \cdot \frac{3}{11} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{11} = \frac{15}{11}$$

$$\frac{3}{12} \cdot \left(-\frac{4}{15}\right) = \frac{3:3}{12:4} \cdot \left(-\frac{4:4}{15:3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9}$$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.III

1) Resolver las siguientes multiplicaciones

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} =$ **c)** $\frac{44}{6} \cdot \frac{8}{11} =$ **e)** $2 \cdot \frac{64}{128} =$ **g)** $-3 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{9}{16} =$

b) $\frac{6}{25} \cdot \frac{5}{3} =$ **d)** $-\frac{9}{5} \cdot \frac{8}{10} \cdot \left(-\frac{10}{10}\right) =$ **f)** $\frac{60}{108} \cdot \frac{18}{15} =$ **h)** $-\frac{2}{7} \cdot \left(-\frac{14}{3}\right) \cdot \left(\frac{-6}{5}\right) =$

2) Resolver aplicando propiedad distributiva

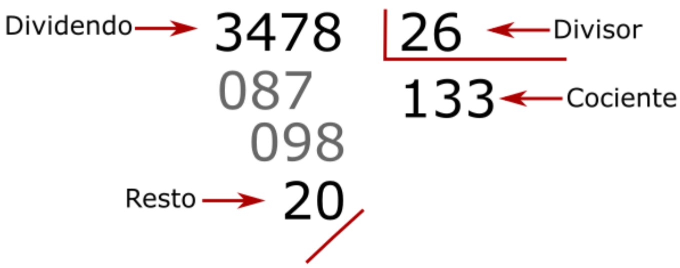
a) $(6a - 3b)\left(-\frac{1}{3}\right) =$ **d)** $-(a + b)(c - d) =$ **g)** $(a + b)(a - b) =$

b) $\frac{1}{2}(8 + x)(x - 1) =$ **e)** $(a + b)(a + b) =$ **h)** $(a + b)(a + b)(a + b) =$

c) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}) =$ **f)** $(a - b)(a - b) =$ **i)** $(a - b)(a - b)(a - b) =$

2.3 División

Como se mencionó anteriormente, existen dos maneras de interpretar la división: como operación o como un número racional. En la imagen a continuación se ilustra la nomenclatura de cada uno de sus elementos, nótese que el numerador sería el dividendo y el denominador, sería el divisor.



Partes de la división

Se tienen las siguientes propiedades.

Propiedad	Definición	Ejemplo
NO conmutativa	$a:b \neq b:a$ $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$	$1:4 = 0{,}25 \;\; y \; 4:1 = 4$ $\frac{1}{4} \;\; y \frac{4}{1} = 4$
NO asociativa	$(a:b):c \neq a:(b:c)$ $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} \neq \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = a \cdot \frac{c}{b}$	$(4:1):3 = 4:3 = \frac{4}{3} = 1,\widehat{3}$ ó $4:(1:3) = 12$ $\frac{\left(\frac{4}{1}\right)}{3} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ ó $\frac{4}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 4 \cdot \frac{3}{1} = 12$
Distributiva con respecto a la suma	$(a+b):c = a:c + b:c$ $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$	$(4+1):3 = 5:3 = 1,\hat{6} = \frac{5}{3}$ ó $(4+1):3 = 4:3 + 1:3 = 1,\hat{3} + 0,\hat{3} = 1,\hat{6}$ $\frac{4+1}{3} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ ó $\frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}$
Inverso multiplicativo	$\frac{a}{b} : \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$	$-\frac{2}{5} : \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{10}{10} = 1$
Neutro multiplicativo	$a:1 = a$ $\frac{a}{1} = a$	$8:\frac{2}{2} = 8:1 = \frac{8}{1} = 8$

2.3.1 Pensando divisiones como multiplicaciones

La división puede ser pensada (como se muestra en el cuadro de propiedades arriba), como una multiplicación del dividendo por el inverso multiplicativo del divisor. Es decir:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

2.3.2 ALERTA DE ERROR INMINENTE I. Propiedad distributiva.

Hay que tener cuidado al aplicar la propiedad distributiva de la división. Nótese que sólo el divisor (denominador) es distributivo respecto a una suma en el dividendo (numerador) y no en viceversa. Es decir:

$$\frac{a}{b+c}\neq\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$$

Por ejemplo:

$$\frac{1}{2+3}=\frac{1}{5} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

2.3.3 ALERTA DE ERROR INMINENTE II. Fracciones con más de un renglón

En ocasiones, encontrarás expresiones con racionales con "más de un renglón", por lo que es importante saber cómo deben ser interpretadas. A continuación, se muestran algunos casos con su interpretación:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d} \qquad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}=\frac{a}{b}:c \qquad \frac{a}{\left(\frac{c}{d}\right)}=a:\frac{c}{d} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b}:c$$

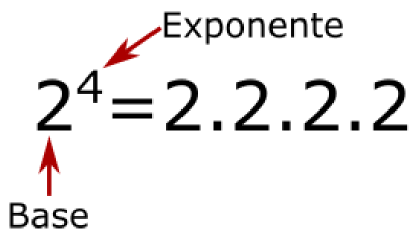
Nótese que la línea que separa la división es un poco más larga que la que separa al numerador del denominador de la fracción. Esto hace que en ocasiones no se utilicen los paréntesis en caso como el segundo o el tercero.

Otro recurso para obviar los paréntesis es expresar la fracción con la forma $\frac{a}{b}$. Entonces, por ejemplo: $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}=\frac{\frac{a}{b}}{c}$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.IV
1) Expresar como multiplicación y resolver **a)** $\left(-\frac{4}{5}\right):\left(-\frac{8}{20}\right)$ **b)** $(-5):\left(-\frac{4}{5}\right)$ c) $-\frac{70}{30}:\frac{49}{21}=$ d) $\frac{5}{30}:\frac{15}{16}:\frac{2}{3}=$
2) Escribir en forma de fracción y resolver. **a)** $2:3:6=$ **c)** $(5+2):3=$ **d)** $\frac{1}{3}:\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=$ **b)** $2:(3:6)=$ **d)** $5:(2+3)=$ **e)** $\left(\frac{2}{5}-5\right):\frac{1}{4}=$
3) Resolver las siguientes divisiones **a)** $\frac{\frac{1}{2}}{3}=$ **c)** $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}}=$ **e)** $\frac{-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{4}}=$ **b)** $\frac{3}{\frac{1}{2}}=$ **d)** $\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}=$ **f)** $1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}=$
4) Aplicar, cuando sea posible, propiedad distributiva y resolver **a)** $\frac{\frac{1}{3}-4}{\frac{1}{2}}=$ **c)** $\frac{a}{a+2}=$ **b)** $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-4}=$ **d)** $\frac{a+b}{b}=$

2.4 POTENCIA

La potencia es una operación en la cual se multiplica la base cuantas veces indica el exponente (ver imagen)



Sus propiedades son:

Propiedad	Definición	Ejemplo
Distributiva con respecto al producto	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$ ó $2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$
Distributiva con respecto a la división	$(a : b)^m = a^m : b^m$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$ ó $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = (-1)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = -1 \cdot \frac{2^3}{3^3} = -\frac{8}{27}$
Producto de potencias de igual base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(-2)^3(-2) = -8(-2) = 16$ ó $(-2)^3(-2) = (-2)^4 = 16$
División de potencias de igual base	$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$3^4 : 3^2 = \frac{3^4}{3^2} = \frac{81}{9} = 9$ ó $3^4 : 3^2 = \frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$
Potencia de potencia	$(a^n)^m = a^{n*m}$	$(4^2)^3 = 16^3 = 4096$ ó $(4^2)^3 = 4^6 = 4096$
Potencias de base 1	$1^m = 1$	$1^{-1000} = \frac{1}{1^{1000}} = \frac{1}{1} = 1$
Potencias de base 0	$0^m = 0$ $Con\ m \neq 0$	$0^2 = 0$

Potencias de exponente 1	$a^1 = a$	$(-1000)^1 = -1000$
Potencias de exponente 0	$a^0 = 1$	$(-1000)^0 = 1$

2.4.1 Potencias de exponente negativo

En el caso particular de que el exponente sea negativo, la potencia es equivalente a la potencia del inverso multiplicativo de la base, elevado a un exponente positivo. Es decir:

$$Si\ m\ es\ positivo,\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$$

Por ejemplo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^{3} = \frac{125}{27} \qquad\qquad 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

2.4.2 ALERTA DE ERROR INMINENTE 1. La potencia NO es distributiva con respecto a la suma

Nótese que el hecho de que no esté mencionada la propiedad distributiva respecto a la suma (o la resta), implica que ésta no existe. Por ejemplo:

$$(5+3)^2 = 8^2 = 64 \qquad \text{y} \qquad 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$$

Teniendo en cuenta esta limitación surge el trinomio cuadrado perfecto y el cuadrinomio cubo perfecto que se verá en la sección de factorización.

2.4.3 ALERTA DE ERROR INMINENTE 2. Uso de paréntesis en propiedad distributiva

Es importante la correcta utilización del paréntesis al expresar y resolver las potencias. Nótese que, por ejemplo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8} \qquad \text{y} \qquad \frac{1^3}{2} = \frac{1}{2}$$

O también

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9 \qquad \text{y} \qquad -3^2 = -1 \cdot 3^2 = -9$$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.V

1) Resolver aplicando propiedades

a) $(-1)^{1284} =$

b) $(-1)^{1285} =$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3} =$

d) $\frac{1}{4^{-2}} \cdot \frac{2^{-1}}{3} =$

e) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{3} =$

f) $\left(\frac{2^2}{3}\right)^{3} =$

g) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} : \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} =$

h) $\frac{8 \cdot 4^{-3} \cdot 2}{\frac{1}{8}} =$

i) $\frac{16 \cdot 27^{-1} \cdot 6^2}{32 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)} =$

j) $\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot 216}{36} =$

k) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{5}{4}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \left(\frac{81}{16}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5} \left(\frac{2}{3}\right) \left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^2 \left(\frac{8}{27}\right)^3} =$

l) $\frac{\left(a^2 b^{-3}\right)^4 a^3 a^{-7}}{(a^{-2} b^8)^2} =$

2) Determinar si las siguientes afirmaciones son V o F. Justificar en cada caso

a) $2^8 = 2^5 2^3$	**d)** $(2^3)^2 = 2^5$	**g)** $(-3)^2 = 3^2$
b) $24^2 = 8^2 3^2$	**e)** $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	**h)** $5 \cdot (5^4)^2 = 5^9$
c) $(8+3)^2 = 8^2 + 3^2$	**f)** $5^{-2} = -10$	**i)** $2a^2 + 2a^2 = 4a^2$

2.5 Radicación

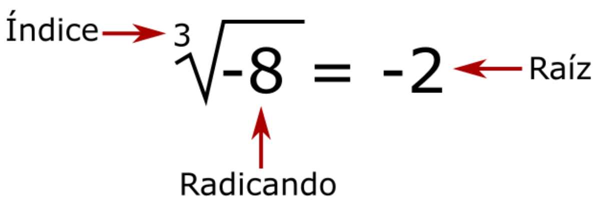
La radicación es la operación inversa a la potenciación y se conoce puede definir como:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad si\ y\ sólo\ si \quad b^n = a$$

Por ejemplo:

$\sqrt[4]{16} = 2\ ya\ que\ 2^4 = 16$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-80} = -2\ \ ya\ que\ \ (-2)^3 = -8$

Los elementos de esta operación son los que se muestran en la siguiente imagen:



En ocasiones, las raíces no pueden resolverse y, teniendo en cuenta que este curso se operará sólo con números reales, debe decidirse si seguir operando o no ya que podemos estar en frente de un número irracional o un número complejo. En general, será un número complejo si el índice es par y el radicando negativo, en el resto de los casos, será un número irracional. Por ejemplo:

$$\sqrt{-2}\ es\ un\ número\ complejo, no\ se\ puede\ operar$$

$$\sqrt{2}\ es\ un\ número\ irracional, se\ puede\ operar$$

Nótese además que cuando el índice de la raíz es 2, suele no escribirse, es decir: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$. Cualquier otro valor de índice debe estar indicado obligatoriamente.

Las propiedades, se muestran en la tabla a continuación:

Propiedad	Definición	Ejemplo
Distributiva con respecto al producto	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[2]{2 \cdot 3} =$ ó $2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$
Distributiva con respecto a la división	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{-1}{27}} = -\frac{1}{3}$ ó $\sqrt[3]{\frac{-1}{27}} = \frac{\sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{-1}{3}$

Raíz de raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$ ó $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$
Raíz de 1	$\sqrt[n]{1} = 1$	$\sqrt[20]{1} = \sqrt[20]{1^{20}} = 1$
Raíz de 0	$\sqrt[n]{0} = 0$	$\sqrt[40]{0} = 0$

2.5.1 Pensando la radicación como potenciación

Es posible interpretar la radicación como una potencia con exponente racional, donde el denominador del exponente, es el índice de la raíz. Por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{0,5} \qquad \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{3}}$$

También puede ocurrir que a su vez la raíz o el radicando estén elevados a una potencia. En esos casos, el numerador del exponente fraccionario es el exponente de la potencia. Por ejemplo:

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = 2^{\frac{2}{3}} \qquad \sqrt{5^5} = 5^{\frac{5}{2}}$$

Nótese que cuando se tiene una raíz escrita como una potencia de exponente racional, no es posible apreciar si la potencia o la raíz debe ser aplicada en primer lugar. En general esto no genera mayores inconvenientes, pero en el caso de raíces de índice par y radicando negativo, el orden provoca diferencias. Obsérvese que $\sqrt{(-2)^4} = \sqrt{16} = 4$ y que con $\left(\sqrt{-2}\right)^4$ no se puede continuar operando debido a que no se puede resolver la raíz; a pesar de esto, en ambos casos se podría expresar la raíz como $(-2)^{\frac{4}{2}}$. Para salvar el problema, en este curso se considerará aplicada siempre primero la potencia y luego la raíz (como en el primer caso).

Este recurso es muy utilizado ya que tiene la ventaja que permite utilizar en la radicación las mismas propiedades vistas para la potenciación.

2.5.2 Simplificación de radicales

Como se dijo anteriormente, la radicación es la operación inversa la potencia. Esto quiere decir que, si a un número se lo “potencia” tantas veces como se lo “radica”, es como si sobre él no se hubiera realizado ninguna operación. Por ejemplo:

$$\sqrt{2^2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

Esto se puede ver más claramente cuando se expresan estas operaciones como una potencia con exponente racional, si se utiliza el concepto de fracción equivalente, se puede ver que:

$$\sqrt{2^2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2$$

La simplificación de radicales consiste en llevar la potencia racional a la mínima fracción equivalente. Por ejemplo:

$$\sqrt{4^6} = 4^{\frac{6}{2}} = 4^3 = 64$$

Generalmente en la práctica no se encuentran ejemplos tan obvios como los mostrados y es necesario expresar el radicando de otra forma para poder simplificar los radicales. Por ejemplo:

$$\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4^{\frac{2}{2}} = 4^1 = 4 \quad \text{ó} \quad \sqrt{16} = \sqrt{2^4} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$$

$$\sqrt{125} = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2\sqrt{5}} = \sqrt{5^2}\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 5\sqrt[3]{2}$$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.VI		
1) Extraer factores fuera del radical		
a) $\sqrt{512} =$	**d)** $\sqrt[5]{\frac{a^3 \cdot b^4}{c^5 \cdot d}} =$	
b) $\sqrt[3]{2187} =$	**e)** $\sqrt[3]{\frac{27 \cdot x^3 \cdot z^6}{256y^5}} =$	
c) $\sqrt[4]{3125 \cdot a^5} =$	**f)** $\sqrt[4]{\frac{243 \cdot a^{10} \cdot b^2}{3 \cdot a^2 \cdot b^{10}}} =$	
2) Resolver y en caso que el resultado sea un número irracional, expresarlo con exponente fraccionario		
a) $\sqrt[5]{16} =$	**e)** $\sqrt[6]{27} =$	**i)** $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{64}}{\sqrt[3]{3}}} =$
b) $\sqrt[3]{8\sqrt{2}} =$	**f)** $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3^5}\right)^2} =$	**j)** $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}}{25^{0.5}}} =$
c) $\sqrt[5]{\sqrt{7} \cdot (-32)} =$	**g)** $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{1024}\right)^{-1}} =$	**k)** $\sqrt[6]{\left(\frac{32}{27}\right)^3 \cdot 8} =$
d) $\sqrt{(-5)^{-5}} =$	**h)** $\sqrt{\frac{\sqrt[5]{5}}{16}} =$	**l)** $\sqrt{\frac{11^3}{\sqrt{11^7}} \cdot \sqrt{11}} =$

2.6 LOGARITMACIÓN

La logaritmación es otro tipo de operación inversa a la potencia y se define para poder calcular a qué exponente se debe elevar una base determinada para obtener un número determinado. Coloquialmente, se define como:

$$log_b a = c \iff b^c = a \quad donde\ a, b \in R^+, b \neq 1$$

En la tabla a continuación, se detallan las propiedades:

Propiedad	Definición	Ejemplo
Logaritmo de un producto	$log_b(m \cdot n) = log_b m + log_b n$	$log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}\right) = log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{32}\right) = 5$ $log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}\right) = log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) + log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = 2 + 3 = 5$
Logaritmo de una división	$log_b\left(\frac{m}{n}\right) = log_b m - log_b n$	$log_2\left(\frac{16}{4}\right) = log_2(4) = 2$ $log_2\left(\frac{16}{4}\right) = log_2 16 - log_2 4 = 4 - 2 = 2$

Logaritmo de una potencia	$log_b a^n = n \cdot log_b a$	$log(4^2) = 1{,}20412$ $log(4^2) = 2log(4) = 2(0{,}60206) = 1{,}20412$
Cambio de base	$log_b a = \frac{log_m a}{log_m b}$	$log_5 20 = 1{,}861353$ $log_5 20 = \frac{log(20)}{log(5)} = \frac{1{,}30103}{0{,}69897} = 1{,}861353$
Logaritmo de 1	$log_b 1 = 0$	$log_{15} 1 = 0$ $ya\ que\ por\ definición$ $log_{15} 1 = 0 \Leftrightarrow 15^0 = 1$
Logaritmo de la base	$log_b b = 1$	$log_{31} 31 = 1$ $ya\ que\ por\ definición$ $log_{31} 31 = 1 \Leftrightarrow 31^1 = 31$
Potencia de logaritmo con igual base	$b^{log_b m} = m$	$5^{log_5 3} = 3$ $ya\ que\ por\ definición$ $log_5 3 = log_5 3 \Leftrightarrow 5^{log_5 3} = 3$
Uniformidad del logaritmo	$log_m a = log_m b \Leftrightarrow a = b$	

2.6.1 Logaritmo en base 10

Cuando el logaritmo no tiene especificado el valor de su base, se entiende por convención que su valor es 10. Todas las propiedades anteriores se aplican con la salvedad de que b=10.

Este logaritmo es muy utilizado y es probablemente el único con nombre “log” que figura en tu calculadora científica. Nótese que a pesar de que no se tenga la posibilidad de ingresar el logaritmo en cualquier base, por medio de la cuarta propiedad de la tabla, se puede realizar el cálculo. Por ejemplo:

$$log_2 14 = \frac{log_{10} 14}{log_{10} 2} = \frac{log 14}{log 2} = 3{,}8074$$

2.6.2 Logaritmo en base e

El logaritmo en base e, también denominado *logaritmo natural* o *logaritmo neperiano* se denomina como ln, es decir que $log_e a = ln\, a$. Se cumplen en él todas las propiedades del logaritmo anteriormente dadas.

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.VII

1) En la definición de logaritmo:

- **a)** ¿Por qué cree que a y b deben ser números reales positivos?
- **b)** ¿Por qué debería ser b distinto de 1?

2) Realizar la tabla de propiedades de logaritmo para los casos particulares en que b=10 y b=e, colocando un ejemplo en cada caso.

3) Calcular

a) $log_5(125) =$ **d)** $log_{\frac{1}{2}}(0{,}25) =$ **g)** $ln\left(\frac{1}{e^5}\right) =$

b) $log_2(32) =$ **e)** $log\ (0{,}001) =$ **h)** $log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt[5]{\frac{1}{81}}\right) =$

c) $log_{\sqrt{5}}(125) =$ **f)** $log_9\left(\frac{1}{3}\right) =$ **i)** $log_9(\sqrt[4]{3})$

4) Utilizando propiedades de logaritmo, expresar de la forma más sintética posible:

a) $log\ (x)\ - log\ (y) =$

b) $2log\ (x)\ + 3log\ (y) =$

c) $log\ (p)\ + log\ (q)\ - log\ (r)\ - log\ (s) =$

d) $log\ \left(\frac{1}{2}\right) + log\ (16)\ + log\ \left(\frac{1}{4}\right) =$

e) $\frac{1}{2}log\ (a)\ + \frac{3}{4}log\ (a)\ - \frac{2}{3}log\ (a) =$

3 APLICACIONES PRÁCTICAS IMPORTANTES

A continuación se mostrarán aplicaciones de las propiedades anteriormente dadas para número reales que resultan muy útiles para la resolución de ejercicios, simplificación de expresiones o para despejar incógnitas (tema que se verá en la próxima unidad)

3.1 EJERCICIOS COMBINADOS

Se llama ejercicios combinados a aquellos que tienen una combinación de las operaciones vistas en la sección anterior. Para resolver estos ejercicios, es necesario respetar la jerarquía de resolución establecida por los términos (componentes constitutivos de la suma y la resta), las llaves { }, los corchetes [ ] y los paréntesis ( ). En ocasiones, se usan sólo paréntesis y siempre se debe resolver de "adentro" hacia "afuera".

En general, el orden de resolución es:

1. Paréntesis
2. Corchetes
3. Llaves
4. Potencias, logaritmos y raíces
5. Multiplicaciones y divisiones
6. Sumas y restas

Es frecuente que, dentro de 1, 2, 3 y 4 existan otras operaciones combinadas. En esos casos dentro de cada uno, se respeta la jerarquía establecida.

Se mostrará a continuación la resolución de un ejercicio combinado. En general, el orden de resolución o la cantidad de pasos varía según la persona, pero siempre que se respete la jerarquía, el resultado debe ser el mismo. Se propone estudiante que resuelva también el ejercicio y compare resultados:

$$\left\{\frac{\left[\left(2-2\cdot\frac{3}{5}\right)+log_2\left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(7\cdot\frac{1}{2}-1\right)^3\right]\cdot 2}{5-\frac{6}{5}}\right\}\cdot\left(-\frac{19}{11}\right)$$

Se separa en términos dentro de los () y se resuelven operaciones 4 y 5 según corresponda	$\left\{\frac{\left[\left(2-\frac{6}{5}\right)-\frac{1}{8}-\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{7}{2}-1\right)^3\right]\cdot 2}{5-\frac{6}{5}}\right\}\cdot\left(-\frac{19}{11}\right)=$
Se resuelven las sumas dentro de los ( )	$\left\{\frac{\left[\frac{4}{5}-\frac{1}{8}-\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3\right]\cdot 2}{5-\frac{6}{5}}\right\}\cdot\left(-\frac{19}{11}\right)=$

Se separa en términos dentro de los [ ] y se resuelven operaciones 4 y 5	$\left\{\frac{\left[\frac{4}{5}-\frac{1}{8}-\frac{2}{5}\right]\cdot 2}{5-\frac{6}{5}}\right\}\cdot\left(-\frac{19}{11}\right)=$
Se resuelven las sumas dentro de los [ ] y además la suma en el denominador	$\left\{\frac{\frac{11}{40}\cdot 2}{\frac{19}{5}}\right\}\cdot\left(-\frac{19}{11}\right)=$
Se resuelven multiplicaciones dentro de { } y se obtiene el resultado	$\left\{\frac{11}{4\cdot 19}\right\}\cdot\left(-\frac{19}{11}\right)=-\frac{1}{4}$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.VIII

1) Resolver los siguientes ejercicios combinados

a) $7-\{5+10[20:5-2+4(5+2\cdot 3)]-8\cdot 3^2\}+50\big(6:(-2)\big)=$

b) $\frac{2}{3}:\left[5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]=$

c) $\dfrac{\left(2-\frac{\log(10)}{5}\right)^2}{\left(3-\frac{2}{\log_2(512)}\right)^{-1}}:\dfrac{\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{4}-\frac{2}{7}:\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}:\frac{1}{5}\right)}-5\cdot\frac{1}{7}=$

3.2 OPERACIÓN CON NÚMEROS IRRACIONALES

3.2.1 Adición y sustracción

Para realizar sumas y restas de números irracionales, es necesario que cada uno de los términos esté multiplicado por el mismo radical. Por ejemplo:

$$-3\sqrt{2}+\sqrt{2}=(-3+1)\sqrt{2}=-2\sqrt{2} \qquad \sqrt{3}+\sqrt{2}\ \ \textit{no se puede sumar}$$

El proceso realizado en el primer caso, es equivalente a extraer un factor común (ver 3.3.1).

3.2.2 Multiplicación y división

Para realizar multiplicaciones, se recurre a utilizar la propiedad distributiva de las raíces a la inversa. Recordando:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

Nótese que para poder “juntar” las raíces, es necesario que tengan el mismo índice. Hay veces que esto no sucede, lo que se resuelve de la siguiente manera:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[n.m]{a^m}\cdot\sqrt[m.n]{b^n}=\sqrt[n.m]{a^m b^n}$$

Por ejemplo:

$$\sqrt[2]{3}\cdot\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[2\cdot 3]{3^3}\cdot\sqrt[3\cdot 2]{(2^2)^2}=\sqrt[6]{3^3\cdot 2^4}=\sqrt[6]{432}$$

Hay casos donde los índices son múltiplos y sólo se modifica uno de ellos para que llegue a igualarse al otro. Por ejemplo:

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[2\cdot 2]{5^2}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{25}\cdot\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{50}$$

Para resolver las divisiones, hay que realizar un procedimiento similar con la aplicación de la propiedad distributiva de la raíz con respecto a la división.

3.2.3 Racionalización de denominadores

La racionalización de denominadores, consiste en “eliminar” el número irracional del denominador “convirtiéndolo” en un número real. Según sea el caso que se encuentre, hay distintos métodos.

3.2.3.1 Caso I: El denominador es un número irracional

Cuando en el denominador hay un número irracional, se procede a multiplicar y dividir por un número irracional de igual raíz con la potencia necesaria para que la raíz se simplifique. Por ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt[6]{2\cdot a^5}}=\frac{1}{\sqrt[6]{2\cdot a^5}}\cdot\frac{\sqrt[6]{2^5\cdot a}}{\sqrt[6]{2^5\cdot a}}=\frac{\sqrt[6]{2^5\cdot a}}{\sqrt[6]{2^6\cdot a^6}}=\frac{\sqrt[6]{2^5\cdot a}}{2a}$$

Nótese que la igualdad se mantiene miembro a miembro ya que multiplicar y dividir por el mismo número es equivalente a multiplicar por el número 1 que es el neutro multiplicativo.

3.2.3.2 Caso II: El denominador tiene suma o resta y contiene al menos un término irracional con raíz cuadrática

En este caso, se recurre a la *diferencia de cuadrados* (sección 3.4.3.1) para que se simplifique la raíz de los números irracionales con raíz cuadrada. Cuando en el denominador se tiene una suma, se multiplica y divide por la resta de los términos y si tiene una resta, por la suma. Se muestran a continuación algunos ejemplos:

$$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})}{1^2+\sqrt{3}-\sqrt{3}-(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})}{1-3}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(1-\sqrt{3})}{1^2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{2}\cdot(1-\sqrt{3})}{1-3}=-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.IX

1) Resolver las siguientes sumas de números irracionales

a) $2\sqrt{12}+2\sqrt{48}-\sqrt{27}=$ **d)** $\sqrt{9x}-\sqrt{25x}+\sqrt{49x}=$ **g)** $\sqrt[4]{9y^8}+\sqrt[6]{27y^{12}}=$

b) $\sqrt{8}+\sqrt{18}+3\sqrt{32}=$ **e)** $\sqrt{18a^3}-11a\sqrt{2}+2\sqrt{50a^3}=$ **h)** $2\sqrt[3]{4}+3\sqrt[9]{64}-4\sqrt[6]{16}=$

c) $\sqrt{45}+\sqrt{63}-\sqrt{18}=$ **f)** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{16}{27}}-\frac{5}{3}\sqrt[3]{54}+5\sqrt[3]{\frac{2}{125}}=$ **i)** $3\sqrt[6]{81}-4\sqrt[3]{24}$

2) Racionalizar

a) $\frac{1}{\sqrt[7]{a.b^7.c^{10}}}=$ **d)** $\frac{2x}{3\sqrt[3]{x}}=$ **g)** $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=$

b) $\frac{32}{\sqrt[12]{2^5}}=$ **e)** $\frac{1}{1-\sqrt{2}}=$ **h)** $\frac{12(\sqrt{3}+5)}{\sqrt{3}-5}=$

c) $\frac{4}{\sqrt[9]{256y^8}}=$ **f)** $\frac{1}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$ **i)** $\frac{\sqrt{20}}{20+\sqrt{20}}=$

3.3 MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

La factorización es un proceso que consiste en re-escribir una expresión matemática como multiplicación de factores. En general, toda expresión matemática se considera simplificada si queda expresada de este modo.

3.3.1 Factor común

Este método de resolución consiste es básicamente utilizar la propiedad distributiva del producto respecto a la suma a la inversa. Consiste en buscar “factores en común” entre distintos términos y expresar esa suma como una multiplicación ente factores, es importante siempre chequear que si se utiliza la propiedad distributiva se llega a la primera expresión. Por ejemplo:

$$2a + 10g + 6d = 2(a + 5g + 3d)$$

$$-a - 9g + 6d = -3\left(\frac{a}{3} + 3g - 2d\right)$$

3.3.2 Factor común por agrupación de términos

Esta técnica consiste en agrupar y factorizar términos de convenientemente de forma tal que los grupos tengan un factor común. Por ejemplo:

$$ax + ay + bx + by = (ax + bx) + (ay + by) = x(a + b) + y(a + b) = (x + y)(a + b)$$

$$2x^2 + 8x + 3x + 12 = (2x^2 + 8x) + (3x + 12) = 2x(x + 4) + 3(x + 4) = (2x + 3)(x + 4)$$

Hay ocasiones en que el factor común no se encuentra tan explícito como se mostró en el ejemplo y se debe re-acomodar los términos, como se muestra a continuación

$$2x^2 + 7x + 6 = 2x^2 + 3x + 4x + 6 = x(2x + 3) + 2(2x + 3) = (x + 2)(2x + 3)$$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.X

1) Extraer el factor común de las siguientes expresiones

a) $8a - 4b + 16c + 12d =$

b) $9x^2 - 6x^2 + 12x^5 - 18x^7 =$

c) $2 \cdot log\ (a) - 2 =$

d) $\frac{4}{3}x - \frac{8}{9}x^3 + \frac{16}{15}x^7 - \frac{2}{3}x^5 =$

e) $3(x + 1) - 5x(x + 1) + (x + 1)x^2 =$

f) $(a + b)(a - b) - (a - b)^2 =$

2) Extraer el factor indicado

a) $3a + 6b + 9c = 9($________________$)$

b) $x - 2 = 2x($________________$)$

d) $8a - 4b + 16c + 12d = -16c($________________$)$

e) $\left(-\frac{a}{2} + 14b - 11c\right) = -7($________________$)$

3) Factorizar por grupos

a) $am + bm + a^2 + ab =$

b) $ax - bx - ay + by =$

c) $am - 2bm - 3an + 6bn =$

d) $x^2 + 2 + 2x + x^3 =$

e) $x^4 - 2x^3 + x^5 + 3x - 6 + 3x^2 =$

f) $17ax - 17mx + 30ay - 3my + 7az - 7mz =$

g) $4x^2 - 4x - 2 =$

h) $-6x^2 + 2x + \frac{1}{2} =$

3.4 MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Los polinomios son expresiones matemáticas de uso muy frecuente en ingeniería. Recordemos que un polinomio es la suma finita de monomios, siendo éstos últimos una expresión de la forma $a_n x^n$ donde a_n, denominado coeficiente, es un número real cualquiera y n es un número natural. Ejemplos de polinomios podrían ser:

$$ax^2 + bx + c \qquad\qquad 2x^3 - \sqrt{2}x^2 + 8$$

El grado de un polinomio está determinado por el exponente de la mayor potencia de x, en los ejemplos el primer polinomio es de grado dos y el segundo, de grado 3.

Un polinomio está completo cuando tiene todos los monomios, desde el término independiente $a_0x^0 = a_0$ hasta el término de mayor grado. Nótese $2x^3 - \sqrt{2}x^2 + 8$ estaría incompleto ya que no se encuentra el término $a_1x^1 = a_1x$; en este caso se considera que el coeficiente $a_1 = 0$.

Resulta de interés encontrar el valor de x que haga que la suma de los monomios dé como resultado 0. Este valor de x se denomina raíz del polinomio. Por ejemplo:

$$El\ polinomio\ \ x^2 + 2x - 3\ tiene\ como\ raíz\ a\ x = -3\ ya\ que$$

$$(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$$

Los polinomios pueden ser escritos como multiplicación de factores donde cada uno de estos tiene la forma $(x - a)$ donde a es una de las raíces. Por ejemplo, el polinomio anterior, tiene también raíz en $x = 1$ y puede ser escrito de forma factorizada como: $(x + 3)(x - 1)$. Para verificar que las dos expresiones son equivalentes, basta con resolver la multiplicación:

$$(x + 3)(x - 1) = x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 2x - 3$$

Como máximo, se podrán encontrar tantas raíces reales como grado tenga el polinomio, aunque a podría pasar que no existan raíces reales o que sólo algunas sean reales.

En general, el proceso de hallar la raíz de un polinomio no es sencillo, en próximos cursos aprenderás formas de acotar posibilidades de raíces (ya que en principio podría ser cualquier número) y también cómo aproximar valores por medio de métodos computacionales. También habrá ocasiones en las que para poder factorizar el polinomio debas ampliar el campo numérico e incluir a los números complejos. Afortunadamente, para algunos polinomios de formas características, existen reglas que nos permiten encontrar las raíces y son las que estudiaremos a continuación.

3.4.1 Factorización de polinomios encontrando la raíz

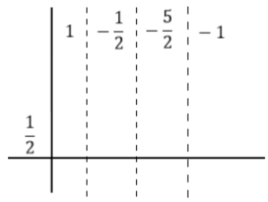
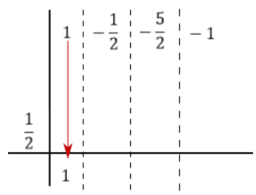
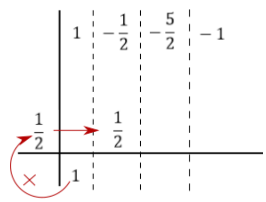
En este apartado, no se hablará de métodos para determinar qué números podrían ser raíces de un polinomio, aunque si se verá cómo saber si un valor es raíz o no y cómo reescribir un polinomio cuando se halló una raíz por medio de la utilización de la regla de Ruffini. Es regla sirve para resolver de forma sencilla la división de cualquier polinomio por un binomio de la forma $(x - a)$.

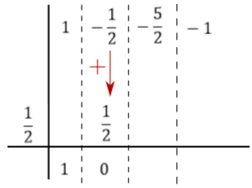
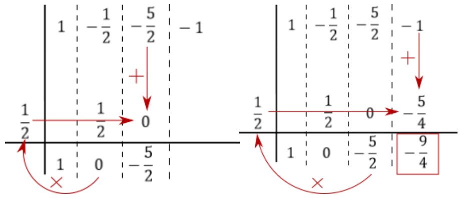
Supongamos que se tiene el siguiente polinomio:

$$x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 1$$

Y debemos verificar si $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$ son raíces y, en caso de encontrar las raíces, debemos expresar el polinomio factorizado.

En principio, la verificación de si son raíces o no se podría hacer reemplazando los valores de x propuestos y si el resultado cero, es raíz. En este caso se realizará la verificación por medio de la regla de Ruffini. Se comenzará probando con $x_1 = \frac{1}{2}$.

Regla de Ruffini	
1. Se escribe el polinomio de forma ordenada y completa	$x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 1$
2. Se realiza una especie de "cruz" donde se colocan de forma ordenada los coeficientes de cada monomio y en la esquina inferior izquierda, el valor por el cual se divide.	
3. Se "baja" el primer coeficiente	
4. Se multiplica el primer coeficiente por el número a dividir y se lo coloca debajo del segundo coeficiente	

5. Se suma el segundo coeficiente con el resultado de la multiplicación y el resultado se coloca debajo de la línea horizontal.	
6. Repetir los pasos anteriores utilizando todos los coeficientes.	

Para que un número sea raíz de un polinomio, el “resto” debe ser cero. En este caso, da $-\frac{9}{4}$ por lo que $x_1=\frac{1}{2}$ no es raíz del polinomio. Si se reemplaza el valor, se tiene que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}\frac{1}{2}-1=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{5}{4}-1=-\frac{9}{4}$$

En cambio si realizamos la misma operación con $x_2=-\frac{1}{2}$, se obtiene lo siguiente:

	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-1
$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	1	-1	-2	$\boxed{0}$

Luego como el resto es cero, $x_2=-\frac{1}{2}$ es raíz del polinomio. Los valores debajo de la horizontal, representan los coeficientes de un polinomio de un grado inferior al calculado inicialmente. El polinomio factorizado podría escribirse como:

$$x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-1=(x^2-x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Nótese que el binomio por el cual se dividió se escribe con el opuesto de la raíz. Es decir si la raíz es a, el binomio tiene la forma $(x-a)$. Esto tiene sentido si se tiene en cuenta que reemplazando el valor de x por la raíz, el polinomio se tiene que anular es decir:

$$\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)-2\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)-2\right)\cdot 0=0$$

3.4.2 Bhaskara

Cuando se tiene un polinomio de segundo grado, es decir ax^2+bx+c, es posible calcular sus raíces por medio de la regla de Bhaskara. Esta establece que las raíces se pueden calcular como:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad donde \qquad \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{array}$$

Una vez halladas las raíces, el polinomio puede ser re-escrito como:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Nótese que el argumento de la raíz tiene una resta, por lo que podría ser negativo. En ese caso, la raíz no tiene solución en el campo de los números reales y, en este curso, se considerará al polinomio como irreducible o no factorizable.

En el ejemplo anterior, se pudo expresar el polinomio como $(x^2-x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Si se aplica Bhaskara sobre el primer factor:

$$a=1 \quad b=-1 \quad c=-2$$

$$x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{1+\sqrt{9}}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$

$$x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{1-\sqrt{9}}{2}=\frac{1-3}{2}=-1$$

Entonces se tiene que:

$$(x^2-x-2)=(x-2)(x+1)$$

Y el polinomio completamente factorizado se expresaría como:

$$x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-1=(x-2)(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

3.4.2.1 Caso particular

Cuando se tiene un polinomio de la forma $ax^{2n}+bx^n+c$, aplicando propiedades de la potencia se lo puede pensar como $a(x^n)^2+b(x^n)+c$ y además si $z=x^n$; se puede realizar un "cambio de variable" y quedando de la forma: $a(z)^2+b(z)+c$. A este último, puede aplicársele Bhaskara. Por ejemplo $si\ z=x^2$:

$$x^4-8x^2+16=(x^2)^2-8(x^2)+16=z^2-8z+16$$

Luego aplicando Bhaskara:

$$a=1 \quad b=-8 \quad c=16$$

$$z_1=\frac{-(-8)+\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot 16}}{2\cdot 1}=\frac{8+\sqrt{0}}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$z_2=\frac{-(-8)-\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot (16)}}{2\cdot 1}=\frac{8-\sqrt{0}}{2}=\frac{8}{2}=4$$

En este caso, las dos raíces son repetidas, es decir que:

$$z^2-8z+16=(z-4)(z-4)=(z-4)^2$$

Realizando el cambio de variable nuevamente, se tiene que:

$$(z-4)^2=(x^2-4)^2$$

Al binomio (x^2-4) se le puede aplicar nuevamente Bhaskara para continuar con la factorización.

$$a=1 \quad b=0 \quad c=-4$$

$$z_1=\frac{0+\sqrt{0-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}=\frac{0+\sqrt{16}}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$z_2=\frac{0-\sqrt{0-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}=\frac{0-\sqrt{16}}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

Quedando finalmente:

$$x^4-8x^2+16=[(x-2)(x+2)]^2=(x-2)^2(x+2)^2$$

3.4.3 Suma o resta de binomios con igual exponente

Se estudiarán en esta sección los siguientes casos de polinomios:

$$x^n+a^n \qquad\qquad x^n-a^n$$

3.4.3.1 Diferencia de potencias con exponente par

Toda diferencia de potencias con exponente par de la forma x^n-a^n, es divisible por el monomio $(x-a)$ o, lo que es equivalente, tiene como raíz a a. Por ejemplo si se quiere factorizar el binomio $x^4-1=x^4-1^4$, se lo divide por medio de la regla de Ruffini por el binomio $(x-1)$. Entonces:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^4 - 1 = (x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)$$

Un caso particular y muy frecuente, se tiene cuando las potencias son cuadradas, se llama *"diferencia de cuadrados"* y se cumple que:

$$(x^2 - a^2) = (x - a)(x + a)$$

Esto se puede verificar realizando Ruffini o resolviendo la multiplicación del segundo miembro.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -a^2 \\ a & & a & a^2 \\ \hline & 1 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$$(x - a)(x + a) = x^2 + ax - ax - a^2 = (x^2 - a^2)$$

3.4.3.2 *Suma y diferencia de potencias con exponente impar*

En el caso de que se tengan exponentes impares se tiene que:

- $(x^n - a^n)$ *es divisible por* $(x - a)$*, es decir que* a *es raíz*
- $(x^n + a^n)$ *es divisible por* $(x + a)$*, es decir que* $-a$ *es raíz*

Particularmente si las potencias son cúbicas:

- $(x^3 - a^3) = (x^2 + ax + a^3)(x - a)$
- $(x^3 + a^3) = (x^2 - ax + a^3)(x + a)$

En ambos casos, lo polinomios de segundo grado, no podrán seguir factorizándose.

3.4.4 Trinomio cuadrado perfecto

Anteriormente, se vio que si una raíz es doble o "repetida", el factor queda con la forma $(x \pm a)^2$. Si se desarrolla cada uno, se conforma en cada uno un trinomio cuadrado:

$$(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x - a)^2 = (x - a)(x - a) = x^2 - 2ax + a^2$$

La factorización utilizando este recurso, consiste en identificar cada uno de los elementos del trinomio y "juntarlos". Por ejemplo:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 * 1 * x + 1^2 = (x + 1)^2$$

$$-3x^2 + 12x - 12 = -3(x^2 - 4x + 4) = -3(x^2 - 2 * 2x + 2^2) = -3(x - 2)^2$$

3.4.5 Cuadrinomio cubo perfecto

Cuando una raíz es triple, se encuentra repetida 3 veces y el factor tiene la forma $(x \pm a)^3$. Si se desarrollan los dos casos, se obtienen cuadrinomios cúbicos.

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

$$(x - a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.XI

2) En los siguientes polinomios, verificar cuál de los elementos del conjunto Ʊ es raíz y factorizar

1) $x^4 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 =$ $\quad$ $Ʊ = \left\{0, \pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}\right\}$

2) $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 =$ $\quad$ $Ʊ = \left\{0, \pm 1, \pm 3, \pm \frac{3}{2}\right\}$

3) Factorizar utilizando Bhaskara

1) $x^2 - x - 2 =$ $\quad$ **c)** $x^2 - 2x + 1 =$ $\quad$ **e)** $x^2 + 6x + 3 =$

2) $2 + x^4 - 3x^2 =$ $\quad$ **d)** $x^2 - 1 =$ $\quad$ **f)** $x^2 - 2x + 4 =$

4) Factorizar las siguientes sumas y restas de potencias de igual exponente

a) $x^3 - 8 =$ $\quad$ **c)** $x^4 - 81 =$ $\quad$ **e)** $x^3 + 1 =$

b) $x^2 - 9 =$ $\quad$ **d)** $2x^2 - 18 =$ $\quad$ **f)** $x^2 + 4 =$

5) Factorizar reconociendo en cada caso si es un trinomio cuadrado perfecto o un cuadrinomio cubo perfecto.

a) $9x^2 + 12x + 4 =$ $\quad$ **c)** $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 =$ $\quad$ **e)** $x^6 + 10x^3 + 25 =$

b) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} =$ $\quad$ **d)** $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} =$ $\quad$ **f)** $x^6 - 9x^4 + 27x^2 - 27 =$

UNIDAD 2 - ECUACIONES E INECUACIONES

ANOTADOR DE CONSULTAS

1 ECUACIONES

1.1 ECUACIONES DE PRIMER GRADO

La necesidad de enumerar y contar los objetos que se tenían, llevó al Hombre a crear representaciones de cantidades que podemos pensar como los primeros símbolos numéricos.

Así también surgieron las operaciones entre ellos como forma de registrar datos de interés. A modo de ejemplo se puede plantear la inquietud de conocer la cantidad de animales que reunían los habitantes de la misma aldea o también registros comerciales rudimentarios.

Es sabido que, ya en el siglo XVI a. c. los egipcios resolvían problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres, de cosechas y de materiales que eran equivalentes a resolver **ecuaciones algebraicas** simples de primer grado sin contar aún con la notación algebraica que conocemos actualmente.

Los matemáticos chinos de principios de nuestra era escribieron el libro "*El arte del cálculo"* en el que plantearon diversos métodos para resolver ecuaciones algebraicas de primero y segundo grado, así como sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Posteriormente, el matemático griego Diofanto de Alejandría publicó su libro "*Aritmética*" (en el siglo III) tratando las ecuaciones de primer y segundo grado y se constituyó en uno de los primeros en utilizar símbolos para representar las ecuaciones. También planteó las ecuaciones que tenían soluciones enteras, llamadas en su honor **ecuaciones diofánticas**.

Observamos entonces que, desde el inicio de los tiempos, el Hombre tuvo necesidad no solo de operar con los números sino de resolver situaciones problemáticas concretas y de interés, con lo cual podemos afirmar que la idea de ecuaciones estuvo presente en todos los tiempos y fue logrando cada vez mayor perfeccionamiento en cuanto a su resolución en forma de notación algebraica.

Definimos de forma inicial **igualdad**: es la expresión de que dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor. Por ejemplo: $a = b + c$ o $3x2 = 4x + 15$.

Se define también el concepto de **miembro:** Se llama **primer miembro** de una ecuación a la expresión que está a la izquierda del signo de **igualdad,** y **segundo miembro**, a la expresión que está a la derecha.

UNA ECUACIÓN ES UNA IGUALDAD ENTRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS QUE SE VERIFICA PARA CIERTOS VALORES DE LAS LETRAS A LAS QUE DENOMINAMOS INCÓGNITAS DE UN DOMINIO DE VALIDEZ.

Analicemos las siguientes frases, que muestran la necesidad de resolver una ecuación:

- La inscripción en las carreras de ingeniería aumentó, este año, un 12% respecto del año anterior.
- La cuarta parte de los alumnos ingresantes proviene de escuelas técnicas.
- El total de alumnos de este curso, entre chicas y varones, es de 125.

En el siguiente cuadro volcaremos la frase coloquial, su forma en lenguaje simbólico matemático y el significado de las incógnitas que en cada una de ellas aparece.

Situación	Expresión en lenguaje simbólico	Significado de sus incógnitas
La inscripción en las carreras de ingeniería aumentó, este año, un 12% respecto del año anterior.	$y = x + \frac{12}{100}x$	"y" es inscripción este año y "x" es inscripción del año anterior.
La cuarta parte de los alumnos ingresantes proviene de escuelas técnicas	$y = \frac{1}{4}x$	"y" es cantidad de alumnos que provienen de escuelas técnicas y "x" es el total de ingresantes
El total de alumnos de este curso, entre chicas y varones, es de 125	$z = m + v$	"z" es el total de alumnos de este curso, "m" es cantidad de chicas y "v" es cantidad de varones

ACTIVIDAD: Completar el siguiente cuadro:

Situación	Expresión en lenguaje simbólico	Significado de sus incógnitas
La edad de Pedro es la suma de los cuadrados de las edades de sus dos hijos (Carlos y Joel), más cinco años.		
El producto de tres números naturales y consecutivos es 24.		
El producto de dos números impares consecutivos es 63.		
	$y = x + 2x$	
	$v = c + \frac{5}{100}c$	

Definición previa

MIEMBROS: Se llama **primer miembro** de una ecuación a la expresión que está a la izquierda del signo de **igualdad,** y **segundo miembro**, a la expresión que está a la derecha.

UNA ECUACIÓN LINEAL ES UNA PROPOSICIÓN DE LA FORMA $ax + b = 0 \quad con \quad a, b \in R, \; a \neq 0$ EN LA QUE APARECE UNA IGUALDAD ENTRE DOS MIEMBROS, NÚMEROS REALES CONOCIDOS $(a \; y \; b)$ Y UN NÚMERO REAL PERO DESCONOCIDO AL QUE LLAMAREMOS "INCÓGNITA" (x)

Por ejemplo: $x - 1 = 8$ es una **ecuación lineal**, donde: $(x - 1)$ es el **primer miembro** de la ecuación y 8 es el **segundo miembro** de la ecuación.

Esta ecuación nos está planteando: ¿cuál es el número real que al restarle 1, da por resultado 8?

En este caso puede deducirse fácil y claramente que el número buscado es 9, decimos entonces que $x = 9$ es la solución de esta ecuación y es la única.

LAS RAÍCES O SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN SON AQUELLOS VALORES DE LAS INCÓGNITAS QUE SATISFACEN LA ECUACIÓN PLANTEADA

ACTIVIDAD:

Para cada renglón de la siguiente tabla se da una ecuación y se propone un valor como posible solución de ella. Decir si es verdadero o falso que ese valor sea una solución y, en caso contrario, dar una solución correcta.

Ecuación	Valor propuesto	V ó F
$\mathbf{5x+4=4x-6}$	-10	
$\mathbf{(6x+9):3=3x-(-2).\left(-\frac{1}{2}\right)}$	$\frac{1}{3}$	
$\mathbf{\frac{4x-2}{x+2}=(-8):(-4)}$	3	
$\mathbf{\frac{1}{3}(x-6)=(-4):2+\frac{3}{9}x}$	$\frac{4}{5}$	
$\mathbf{(x+1).3=3x-4}$	3	

En el inciso c), el valor propuesto, ¿es la única solución? ¿cuántas soluciones más se pueden hallar?

____

En el inciso d), el valor propuesto, ¿es la única solución? ¿cuántas soluciones más se pueden hallar?

____

¿Qué se puede concluir en el inciso e)?

____

Retomando la idea que veníamos trabajando, diremos que, no siempre es fácil hacer la deducción que nos lleve a encontrar la solución de una ecuación, con solo observarla.

Pensemos en el siguiente ejemplo:

$$\frac{4x-1}{3x}-\frac{4}{5}=-15x+\frac{3}{5}$$

¿Te parece que es sencillo “deducir”, con solo leerla, cuál es la solución o raíz de esta ecuación?

Esto nos está sugiriendo que debemos encontrar un método para resolver ecuaciones lineales.

Para ello daremos algunas definiciones previas:

Una ecuación es **equivalente** a otra si ambas admiten **idénticas soluciones**.

Existen tres operaciones que garantizan la equivalencia entre ecuaciones, es decir que hay tres operaciones que podemos hacer a una ecuación para obtener otra ecuación equivalente con ella para la cual sea inmediato deducir su solución:

1) Sumar el mismo número en ambos miembros de una ecuación, o bien, sumar el mismo polinomio siempre y cuando éste esté en la misma variable (incógnita) que aparece en la ecuación.

Ejemplo 1: en la ecuación $x+5=7$, podemos sumar (-5) en ambos miembros y obtendríamos $x+5+(-5)=7+(-5)$ lo que nos quedaría como: $x=2$, lo que nos muestra clara y sencillamente que la solución de la ecuación es el número 2.

Ejemplo 2: en la ecuación $5x + 1 = 4x - 3$, podemos sumar (-1) en ambos miembros y obtenemos $5x + 1 + (-1) = 4x - 3 + (-1)$, es decir $5x = 4x - 4$, pero ahora se hace necesario sumar (-4x) a ambos miembros y éste es un polinomio que está en la misma variable (x) que aparece en la ecuación. El procedimiento sería: $5x + (-4x) = 4x - 4 + (-4x)$, lo que dá por resultado $x = (-4)$y ésta es la solución de la ecuación planteada.

2) Multiplicar o dividir ambos miembros de una ecuación por una constante real distinta de cero.

Ejemplo 3: en la ecuación $6x = 2$ podemos dividir ambos miembros por 6 que es una constante distinta de cero y nos arrojaría esta ecuación equivalente: $\frac{6x}{6} = \frac{2}{6}$, es decir que $x = \frac{1}{3}$será la solución de la ecuación planteada.

3) Reemplazar cualquiera de los miembros de una ecuación por una expresión equivalente.

Ejemplo 4: en la ecuación $x\,.(x + 4) = 5$ podemos reemplazar la expresión $x\,.(x + 4)$ por su equivalente: $x^2 + 4x$, obteniendo así la ecuación equivalente a la primera: $x^2 + 4x = 5$.

Luego, aplicando éstas operaciones en una ecuación se obtiene otra equivalente a ella (que admite las mismas soluciones) pero de la cual podemos deducir inmediatamente su solución.

A continuación, mostraremos la resolución de dos ecuaciones. Te invitamos a que completes cada renglón en blanco del costado con el nombre de la operación que se hizo en cada paso:

Hallar $p \in R$ que satisface la siguiente ecuación:

$2\,.(p - 3) + 5 = 4p - 2$ ______________________________

$2p - 6 + 5 = 4p - 2$ ______________________________

$2p - 1 = 4p - 2$ ______________________________

$2p - 1 + 1 = 4p - 2 + 1$ ______________________________

$2p = 4p - 1$ ______________________________

$2p + (-4p) = 4p - 1 + (-4p)$ ______________________________

$-2p = -1$ ______________________________

$\frac{-2p}{-2} = \frac{-1}{-2}$ ______________________________

$p = \frac{1}{2}$ ______________________________

Hallar $x \in R$ que satisface la siguiente ecuación:

$\frac{3x - 1}{4} - \frac{2x + 3}{2} = 6$ ______________________________

$4\,.\left(\frac{3x - 1}{4} - \frac{2x + 3}{2}\right) = 4\,.6$ ______________________________

$4\,.\frac{(3x - 1)}{4} - 4\,.\,\frac{(2x + 3)}{2} = 24$ ______________________________

$(3x - 1) - 2\,.(2x + 3) = 24$ ______________________________

$3x - 1 - 4x - 6 = 24$ ______________________________

$-x - 7 = 24$ ______________________________

$-x - 7 + 7 = 24 + 7$ ______________________________

$-x = 31$ ______________________________

$x = -31$ ______________________________

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 2.I

1) Hallar posibles valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones
   a) $2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{8} = x\sqrt{3}$
   b) $\frac{x}{3}\sqrt{2} = \sqrt{18} + \sqrt{32}$
   c) $3(2x-3) - \frac{1}{4}x = \frac{3}{2}$
   d) $\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) : 2 + 1 = 3x$

3) Plantear y resolver los siguientes problemas
   a) Calcular el área de un rectángulo sabiendo que la altura es igual a los 3/5 de la base y el perímetro mide 72cm.
   b) Un becario aporta los 3/5 de lo que gana para los gastos de su hogar, y emplea 2/3 del resto para otros fines. Si le quedan $800 de ahorro cada mes, ¿Cuánto es el monto que cobra por la beca?
   c) Hallar un número sabiendo que el triplo de la suma de él y 1 es igual a su duplo más su triplo.

1.2 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA ES UNA PROPOSICIÓN DE LA FORMA: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \quad con \quad a, b, c \in R,\ a \neq 0}$ **EN LA QUE APARECE UNA IGUALDAD ENTRE DOS MIEMBROS, NÚMEROS REALES CONOCIDOS** $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b\ y\ c})$**Y UN NÚMERO REAL PERO DESCONOCIDO AL QUE LLAMAREMOS "INCÓGNITA"** $(\boldsymbol{x})$

Se ha establecido la condición $a \neq 0$, pues si fuera $a = 0$ la expresión sería una ecuación lineal. Sin embargo, pueden ser $b = 0 \quad o \quad c = 0$. Veamos los siguientes **ejemplos** de ecuaciones cuadráticas:

Ejemplo 1: $3x^2 - 12 = 0$

Ejemplo 2: $\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$

Ejemplo 3: $x^2 - 2x - 15 = 0$

Ejemplo 4: $-2x^2 - 6x + 8 = 0$

ACTIVIDAD:

Completar sobre la línea punteada:

- En el ejemplo 1, son $a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- En el ejemplo 2, son $a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- En el ejemplo 3, son $a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- En el ejemplo 4, son $a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Recordemos, en este momento que:

LAS RAÍCES O SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN SON AQUELLOS VALORES DE LAS INCÓGNITAS QUE SATISFACEN LA ECUACIÓN PLANTEADA.

ACTIVIDAD:

Para cada renglón de la siguiente tabla se da una ecuación y se propone un valor como posible solución de ella. Decir si es **verdadero** o **falso** que ese valor sea una solución y, en caso contrario, dar una solución correcta.

Ecuación	Valor propuesto	¿Es raíz?
$\boldsymbol{x^2 + 6 = 15}$	-3	
$\boldsymbol{(x+5).(x-6) = 0}$	$\frac{1}{3}$	

$\boldsymbol{x^2 + x = 12}$	4	
$\boldsymbol{(x-1)^2 = 0}$	1	
$\boldsymbol{x^2 + 5 = (-8)}$	2	

En el inciso c), el valor propuesto, ¿es la única solución? ¿cuántas soluciones más se pueden hallar?

___

En el inciso d), el valor propuesto, ¿es la única solución? ¿cuántas soluciones más se pueden hallar?

___

¿Qué se puede concluir en el inciso e)?

___

Nos propondremos ahora, resolver ecuaciones cuadráticas y para ello, consideraremos los distintos casos que hemos ido presentando según los valores de los reales $b \; y \; c$de la expresión.

Comenzamos resolviendo el **<u>Ejemplo 1</u>**: $3x^2 - 12 = 0$

$$3x^2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 12 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 4$$

Esto nos indica que la ecuación tiene dos soluciones, a saber: $x_1 = 2 \quad o \quad x_2 = (-2)$

Efectivamente, puede observarse que colocando cualquiera de estos dos valores reales en la expresión original, la misma se verifica.

<u>Ejemplo 2</u>: $\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x.\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \quad o \quad \frac{1}{2}x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \; x = 0 \quad o \quad \frac{1}{2}x = 2 \quad \Longrightarrow x = 0 \quad o \quad x = 4$$

De nuevo nos aparecen **dos soluciones** para la ecuación planteada, ellas son:

$$x_1 = 0 \qquad o \qquad x_2 = 4$$

Y puede observarse que colocando cualquiera de estos dos valores en la ecuación original, la misma se verifica.

<u>Ejemplo 3</u>: $x^2 - 2x - 15 = 0$

Esta ecuación cuadrática es de las denominadas **"completas"** pues **ninguno** de sus **coeficientes es nulo**. Para resolver este tipo de ecuaciones cuadráticas aplicaremos la fórmula general que se obtiene al despejar el valor de "x" en la expresión general (demostración que no será motivo de interés en este curso introductorio).

En una ecuación cuadrática de la forma: $ax^2 + bx + c = 0 \quad con \quad a, b, c \in R, \quad a \neq 0$, se verifica que:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En nuestro caso es $a = 1$, $b = (-2)$, $c = (-15)$

Por lo tanto, reemplazando tenemos que:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-15)}}{2.1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

Notemos que el símbolo $\pm$ indica que se deben hacer dos cálculos, sumar y restar por separado, lo cual nos dará dos resultados distintos:

$$x_1 = \frac{2+8}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{2-8}{2}$$

Es decir que tendremos soluciones distintas $x_1 = 5$, $x_2 = (-2)$

Si se reemplaza cada uno de estos dos valores por la incógnita “x”, veremos que se verifica lo que expresa la ecuación. Por lo tanto, se tienen dos soluciones reales y distintas. Esto no es casual pues estamos frente a una ecuación cuadrática, pero pueden presentarse otros casos posibles.

Analizamos ahora otros ejemplos:

Ejemplo 4: $3x^2 - 6x + 3 = 0$

Procedemos a identificar los coeficientes de la ecuación. Ellos son:

$$a = 3 \quad , \quad b = (-6) \quad , \quad c = 3$$

Ahora, aplicaremos la fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.3.3}}{2.3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{6} = \frac{6 \pm 0}{6}$$

$x_1 = \frac{6+0}{6}$; $x_2 = \frac{6-0}{6}$ es decir que $x_1 = \frac{6}{6} \Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = \frac{6}{6} \Rightarrow x_2 = 1$

En este caso la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales, pero son iguales

Por último analizaremos el **Ejemplo 6**: $x^2 - 4x + 7 = 0$

Identificados los coeficientes de la ecuación y observando que ellos son:

$$a = 1 \quad , \quad b = (-4) \quad , \quad c = 7$$

Aplicaremos la fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.7}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Sucedió, en este caso, que no es posible hallar, en el conjunto de los números reales, el resultado de la $\sqrt{-12}$ ya que es una raíz de índice par y radicando negativo. Esta raíz tiene solución, pero en otro campo numérico (el conjunto de los números complejos)

Conclusión: no existe en R solución para esta ecuación cuadrática.

Analizaremos qué puede sucedernos al aplicar esta fórmula general y bajo qué condiciones se darán cada una de las situaciones que aparecen.

En la fórmula aparece una raíz cuadrada (índice par) por lo cual el valor y la naturaleza de las raíces dependerán del signo de la expresión $b^2 - 4ac$, a la que denominaremos “discriminante”.

Podrá suceder, entonces, que:

$i)\ b^2 - 4ac > 0$. En este caso, será posible resolver la raíz cuadrada y nos arrojará dos valores reales y distintos.

$ii)$ $b^2 - 4ac = 0$. En este caso, será posible resolver la raíz cuadrada, pero como su valor es cero, obtendremos dos soluciones reales pero iguales.

$iii)$ $b^2 - 4ac < 0$. En este caso, el resultado de la raíz cuadrada no pertenece al conjunto de números reales, por lo cual diremos que no tiene solución entre los reales. Las soluciones de esta ecuación son números complejos conjugados.

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 2.II

1) Hallar los $x \in R$ que satisfacen las siguientes ecuaciones

a) $x^2 + 2 = -3x$

b) $6x^2 - \frac{2}{3}\,x = 0$

c) $x - 2 = -3x^2$

d) $x^2 - 2x + 6 = 0$

e) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{2}{x}\right) + 2 =$

f) $(x+1)^2 = (1-3x)^2$

2) Plantear y resolver los siguientes problemas

a) Hallar un número tal que la diferencia entre el cuadrado de su triple y el cuadrado de su doble sea 125.

b) Hallar la base y la altura de un rectángulo, sabiendo que la base supera en 4cm a la altura y que su área es de 21cm.

c) Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo sabiendo que las medidas de los catetos son números consecutivos y que la hipotenusa mide 5 cm.

3) Indicar la respuesta correcta entre las dadas en la siguiente proposición: Para que la ecuación $ax^2 + 4x - 3 = 0$ tenga dos soluciones reales y distintas, debe ser a :

i. $a = \frac{4}{3}$ ii. $a < \left(-\frac{4}{3}\right)$ iii. $a > \left(-\frac{4}{3}\right)$ iv. $a \geq (-4)$

4) Dada la ecuación cuadrática: $2x^2 + bx + 2 = 0$ y sabiendo que el discriminante es nulo, calcular el o los valores de b.

1.3 ECUACIONES FRACCIONARIAS

UNA ECUACIÓN FRACCIONARIA, EN LA VARIABLE x, ES LA QUE PUEDE SER EXPRESADA DEL A SIGUIENTE FORMA:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

DONDE $P(x)$ Y $Q(x)$ SON POLINOMIOS EN LA VARIABLE x Y $Q(x)$ NO ES EL POLINOMIO NULO

Dado que toda ecuación fraccionaria está igualada a cero, es suficiente que el numerador de la misma sea igual a cero, con el necesario cuidado de descartar los valores de la variable que anulan el denominador.

El valor de x que anula al numerador no debe anular al denominador puesto que entre los números reales no está definida la división por cero.

Antes de trabajar con ecuaciones fraccionarias recordemos las operaciones entre fracciones vistas en el capítulo 1 de números reales.

Continuando con este análisis, entonces tendremos:

Por ejemplo, son ecuaciones fraccionarias:

- $\frac{1}{2x} + \frac{x}{2x} = 4 \quad es\ equivalente\ a: \Leftrightarrow \quad \frac{1+x}{2x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1+x)}{2x} - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1+x)+2x.(-4)}{2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+x-8x}{2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1-7x}{2x} = 0\right]$
- $\frac{x+1}{x-2} = 3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)+(x-2).(-3)}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-3x+6}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{-2x+7}{x-2} = 0\right]$

- $\frac{3}{x}+\frac{5}{2x}=0 \Leftrightarrow \frac{2.3+5}{2x}=0 \Leftrightarrow \frac{6+5}{2x}=0 \Leftrightarrow \left[\frac{11}{2x}=0\right]$
- $\frac{5}{3x}+\frac{6}{4x}=0 \Leftrightarrow \frac{4x.5+3x.6}{12x}=0 \Leftrightarrow \left[\frac{20x+18x}{12x}=0\right]$

Intentemos resolver la siguiente ecuación fraccionaria:

$$\frac{x^2-1}{x+1}=0$$

Para esto, aplicamos las propiedades ya conocidas.

Multipliquemos ambos miembros por *x* +1:

$$\frac{x^2-1}{x+1}(x+1)=0(x+1) \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow \frac{x_1=1}{x_2=-1}$$

Si quisiéramos verificar que los números obtenidos son soluciones de la ecuación origina. ¿Qué sucede? ¿Qué error hemos cometido?

____

____

____

CONCLUSIÓN

CUANDO RESOLVEMOS UNA ECUACIÓN DEL TIPO $\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$ DEBEMOS DESCARTAR COMO POSIBLES SOLUCIONES A LOS VALORES DE X QUE ANULAN EL DENOMINADOR Q(X) ES DECIR, LOS VALORES QUE SATISFACEN LA ECUACIÓN Q(X) = 0. ESTO SE DEBE A QUE NO ESTÁ DEFINIDA LA DIVISIÓN POR 0

EJEMPLO

Hagamos, de nuevo, el ejercicio propuesto al principio.

Resolver la ecuación fraccionaria:

$$\frac{x^2-1}{x+1}=0$$

El ***primer paso*** es considerar que debe ser $x+1\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq(-1)$

Para esto, aplicamos las propiedades ya conocidas.

Multipliquemos ambos miembros por *x* +1:

$$\frac{x^2-1}{x+1}(x+1)=0(x+1) \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow \frac{x_1=1}{x_2=-1}$$

Como hemos establecido que $x\neq(-1)$ entonces decimos que la solución de la ecuación es el siguiente conjunto: $Sol\!: x \in \{1\}$

ES MUY IMPORTANTE DEJAR ESCRITO CUÁL ES EL CONJUNTO SOLUCIÓN QUE HEMOS HALLADO Y A QUÉ VALOR DE LA VARIABLE HEMOS DESCARTADO POR LA CONDICIÓN INICIAL

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 2.III

1) Hallar los $x \in R$ que satisfacen las siguientes ecuaciones

a) $x - \frac{4}{x} = 3$

b) $\frac{2.(1-x)}{x} = \frac{x-6}{4}$

c) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10x} = \frac{1}{5}$

d) $\frac{4x^2}{x-1} - \frac{1-3x}{4} = \frac{20x}{3}$

e) $\frac{x-8}{x-1} = \frac{2x-4}{x+2}$

2) Plantear y resolver los siguientes problemas:

a) De un número natural m, sabemos que el inverso de su siguiente sumado al inverso de su anterior da por resultado $\frac{3}{4}$. Calcular m.

b) Hallar el número que aumentado en sus $\frac{5}{6}$ equivale a su triplo disminuido en 14.

c) ¿Qué número hay que restar a 22 para que esa diferencia equivalga a la mitad de 22 aumentada en los $\frac{6}{5}$ del número que se resta?

1.4 ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Son ecuaciones donde aparece la ***operación logaritmo.*** Las estrategias de resolución de estas *ecuaciones logarítmicas* involucran la utilización de las propiedades vistas en la unidad I.

Una condición importante a tener en cuenta es que el argumento de un logaritmo debe ser estrictamente mayor a cero. Esto debe figurar como condición inicial al comenzar a resolver una ecuación logarítmica.

Ejemplo1: Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$log\ (x+20) = log\, 5 + log\ (x+7)$$

Como condición inicial diremos que: $x+20>0 \Rightarrow x>(-20)$ y $x+7>0 \Rightarrow x>(-7)$

Consideraremos los valores de x que cumplan ***ambas condiciones a la vez,*** es decir que tomaremos: $x>(-7)$

Ahora comenzamos la resolución de la ecuación, propiamente dicha…

$$log\ (x+20) = log\ 5 + log\ (x+7) \rightarrow log\,(x+20) = log\,(5.(x+7)) \rightarrow$$

$$x+20 = 5.(x+7) \rightarrow x+20 = 5x+35 \rightarrow -4x = 35-20 \rightarrow x = -\frac{15}{4}$$

Efectivamente, el valor que hemos hallado cumple la condición inicial ya que es mayor al número (-7), por lo tanto, puede ser tomado como solución de la ecuación. El conjunto solución será entonces: $x \in \left\{-\frac{15}{4}\right\}$

Ejemplo 2: Hallar el conjunto solución de la ecuación: $2\ log\ x - log\ 32 = log\ x - log\ 2$

Como condición inicial diremos que: $x>0$

Ahora comenzamos la resolución de la ecuación, propiamente dicha…

$$2\,log\,x - log\,32 = log\ x - log\,2 \quad \rightarrow \quad log\,x^2 - log\,32 = log\,x - log\,2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{32} = log\,\frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{32} = \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad 2x^2 = 32x \rightarrow 2x^2 - 32x = 0 \quad \rightarrow$$

$$2x(x-16) = 0 \rightarrow 2x = 0 \ \ o \ \ x-16 = 0 \rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 16$$

Si realizamos la verificación de dichos resultados, se puede ver que *x* = 0 NO es solución ya que $\nexists\ log\ 0$ pero *x* = 16 si lo es, luego el conjunto solución de esta ecuación será: $x \in \{16\}$

Ejemplo 3 : Hallar el conjunto solución de la ecuación: $2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$

Notemos que en este caso no hay necesidad de poner ninguna condición inicial, ya que cualquier número real puede ser el exponente buscado.

Entonces, comenzamos con la resolución:

$$2^{x+1}+2^{x-1}=20 \rightarrow 2^{x}\cdot 2^{1}+2^{x}\cdot 2^{-1}=20 \rightarrow 2^{x}.\left(2+\frac{1}{2}\right)=20 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2^{x}.\frac{5}{2}=20 \rightarrow 2^{x}=\frac{2.20}{5} \rightarrow 2^{x}=\frac{40}{5} \rightarrow 2^{x}=8 \rightarrow log\ 2^{x} = log\ 2^{3}$$

$$\rightarrow x.log\ 2 = 3.log\ 2 \rightarrow x=3\ .$$

Este último ejemplo no es un caso específico de ecuación logarítmica, corresponde a una *ecuación exponencial*, pero se utilizan las propiedades de logaritmo, así como también las de potenciación (en este caso) para su resolución.

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 2.IV

1) Hallar los $x \in R$ que satisfacen las siguientes ecuaciones

a) $log_{3}x=2$

b) $log_{x}512=3$

c) $log_{10}0,1=x$

d) $log_{3}(x+4)+log_{3}(x-4)=2$

e) $logx-log_{6}\sqrt[5]{6^{2}}=\frac{3}{5}-log(x-3)$

2 INECUACIONES

DEFINICIÓN: UNA INECUACIÓN ES UNA DESIGUALDAD QUE CONTIENE INCÓGNITAS (VALORES DESCONOCIDOS). EL OBJETIVO, FRENTE A UNA INECUACIÓN ES HALLAR EL CONJUNTO DE NÚMERO REALES QUE SATISFACEN

2.1 INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Resolvamos la siguiente situación a modo de ejemplo.

El tanque de nafta de un auto puede contener hasta 45 litros. Tiene conectado un sistema automático de alarma que se enciende cuando sólo quedan 8 litros en él. ¿Cuántos litros de nafta es posible cargar cuando recién se enciende la señal?

Si con *x* designamos la cantidad de litros que podemos cargar, el problema queda planteado con la siguiente desigualdad:

$$8+x \leq 45$$

Donde 8 representa la reserva, *x* los litros a cargar y 45 la capacidad máxima del tanque.

La desigualdad planteada es una ***inecuación***.

De la misma forma que para resolver ecuaciones necesitamos conocer las propiedades de las igualdades, ahora necesitaremos conocer las propiedades de las desigualdades para poder resolver inecuaciones.

2.2 PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES:

Ley de Tricotomía: Esta propiedad enuncia que, cualesquiera sean los números reales *a* *y* *b*, se verifica entre ellos, una y solo una de estas tres relaciones: $a=b \quad o \quad a>b \quad o \quad a<b$

Ley Transitiva: Esta propiedad enuncia que, si un número real es menor que otro y, a su vez, éste es menor que un tercero, entonces el primero es menor que el tercero.

En símbolos sería: $Si\ a<b\ y\ \ b<c \ \Rightarrow\ a<c\ \forall\ a,b,c\ \in\ R$

Por ejemplo: Sea a = 5, b =8 y c =12. De esta manera tendremos las desigualdades 5 < 8 y 8<12 entonces 5 < 12 lo cual es correcto.

Ley de Consistencia del orden con la suma: Esta propiedad enuncia que, si un número real es menor que otro y le sumamos (a ambos) otro número real, la relación de orden queda conservada.

En símbolos: $Si\ \ a < b\ \ y\ c \in R \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c$

Por ejemplo: Sea a = *-4, b = -2 y c =3.* De esta manera tendremos la desigualdad *-4<-2,* luego sumando *c =3* a ambos miembros : *-4 +3 < -2 + 3* ⇒ -1 < 1*,* lo cual es correcto.

Ley de Consistencia del orden con el producto: Esta propiedad enuncia que, si un número real es menor que otro y le multiplicamos (a ambos) otro número real ***POSITIVO***, la relación de orden queda conservada. En cambio, si le multiplicamos (a ambos) otro número real ***NEGATIVO*** la relación de orden queda en sentido contrario.

En símbolos: $Si\ \ a < b\ \ y\ \ c > 0 \quad \Rightarrow \quad a\,.\,c < b\,.\,c$

Por ejemplo: *a = -4, b = 2 y c =4.* De esta manera tendremos la desigualdad *-4<2* **,**luego multiplicando *c =4* a ambos miembros: -4.4 < *2.4* ⇒ *-16 < 8,* lo cual es correcto.

En cambio: $Si\ \ a < b\ \ y\ \ c < 0 \quad \Rightarrow \quad a\,.\,c > b\,.\,c$

Por ejemplo: *a = -4, b = 2 y c =-4.* De esta manera tendremos la desigualdad *-4< 2* **,**luego multiplicando *c =-4* a ambos miembros: *- 4.- 4 < 2.-4* ⇒ *16 > - 8,* lo cual es correcto.

Ley de Orden de los Inversos: Esta propiedad enuncia que, si un número real es menor que otro, su inverso será mayor que el inverso del otro.

En símbolos: $Si\ \ a < b, con\ a \neq 0\ y\ b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Por ejemplo: *a = -3, b = -2.* De esta manera tendremos la desigualdad *-3< -2*, analizando el inverso de *a y b*: $\frac{1}{-3} > \frac{1}{-2}$ **,** lo cual es correcto.

Ley de Orden de los cuadrados: Esta propiedad enuncia que, si un número real es menor que otro, su cuadrado será menor que el cuadrado del otro, cuando ambos sean ***POSITIVOS*** pero, en cambio, su cuadrado será mayor que el cuadrado del otro, cuando ambos sean ***NEGATIVOS.***

En símbolos: Si $0 < a < b$ *entonces* $a^2 < b^2$

En cambio: Si $a < b < 0$ *entonces* $a^2 > b^2$

Por ejemplo: Si *a = 2, b = 3.* De esta manera tendremos 0 < *a* < *b,* por lo tanto $3^2 < 2^2$ ⇒ *9 < 4* lo cual es correcto.

Pero Si *a = -7, b = -3. .* De esta manera tendremos *a < b < 0,* por lo tanto $(-7)^2 > (-3)^2$ ⇒ 49 *>9* ,lo cual es correcto.

Regla de los signos: Esta propiedad enuncia que, si el producto entre dos números reales da resultado POSITIVO, se nos pueden presentar dos situaciones que son: ambos factores positivos o ambos factores negativos.

En símbolos: Si *a .b > 0 entonces ocurre que: (a > 0 y b > 0) o (a < 0 y b < 0)*

Por ejemplo: Si *a = 5, b = 3 o a = -2, b = -4,* luego vemos que para los primeros valores tendremos 5.3 > 0 ⇒ 15 > 0 y para los segundo valores -2.- 4 > 0 ⇒ 8 > 0, se puede ver que ambas desigualdades son correctas.

En cambio, si el producto entre dos números reales da resultado NEGATIVO, se nos pueden presentar dos situaciones que son: primer factor positivo y segundo negativo o, primer factor negativo y segundo positivo

En símbolos: Si *a .b < 0 entonces ocurre que: (a < 0 y b > 0) o (a > 0 y b < 0)*

Por ejemplo: Si *a = 5, b = -3 o a = -2, b = 4,* luego vemos que para los primeros valores tendremos 5.-3< 0 ⇒ 15 < 0 y para los segundo valores -2.4< 0 ⇒ 8 < 0, se puede ver que ambas desigualdades son correctas.

Todas las propiedades enunciadas valen para el caso de ≤ o de ≥, haciendo las excepciones con respecto al cero cuando corresponda.

La regla de los signos enunciada para el producto también es válida para la división, exceptuando el caso en que el divisor sea cero.

En símbolos: Si $\frac{a}{b} > 0$, $b \neq 0$ *entonces ocurre que:* ($a > 0$ *y* $b > 0$) *o* ($a < 0$ *y* $b < 0$)

Por ejemplo: Si *a = 12, b = 3 o a = -2, b = -4,* luego vemos que para los primeros valores tendremos $\frac{12}{3} > 0 \Rightarrow 4 > 0$ y para los segundo valores $\frac{-2}{-4} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} > 0$, se puede ver que ambas desigualdades son correctas.

En cambio : Si $\frac{a}{b} < 0$, $b \neq 0$ *entonces ocurre que:* ($a < 0$ *y* $b > 0$) *o* ($a > 0$ *y* $b < 0$)

Por ejemplo: Si *a = 12, b = -3 o a = -2, b = 4,* luego vemos que para los primeros valores tendremos $\frac{12}{-3} < 0 \Rightarrow -4 < 0$ y para los segundo valores $\frac{-2}{4} < 0 \Rightarrow \frac{-1}{2} < 0$, se puede ver que ambas desigualdades son correctas.

Ahora estamos en condiciones de resolver el problema planteado en un principio. Debíamos resolver la inecuación: 8 + *x* ≤ 45.

Resolución:

$$
\begin{aligned}
8 + x &\leq 45 \qquad \text{(sumando } -8 \text{ a ambos miembros)} \\
8 + x + (-8) &\leq 45 + (-8) \\
x &\leq 37
\end{aligned}
$$

Luego, podemos cargar cualquier cantidad de litros, siempre que sea menor o igual que 37.

Veamos otro ejemplo: resolver la inecuación

$$\frac{-2x+4}{3} \leq 4 .$$

Resolución:

$$
\begin{aligned}
\frac{-2x+4}{3} &\leq 4 \qquad \text{(multiplicamos ambos miembros por 3 y la desigualdad se mantiene)} \\
\frac{-2x+4}{3} \cdot 3 &\leq 4 \cdot 3 \\
-2x + 4 &\leq 12 \\
-2x + 4 + (-4) &\leq 12 + (-4) \\
-2x &\leq 8 \qquad \text{(multiplicamos ambos miembros por } \left(-\tfrac{1}{2}\right) \text{ y la desigualdad cambia)} \\
-2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) &\geq 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\
x &\geq -4
\end{aligned}
$$

ACTIVIDAD: Dar dos valores de *x* que verifiquen la inecuación original y dos valores que no la verifiquen.

Definiendo previamente:

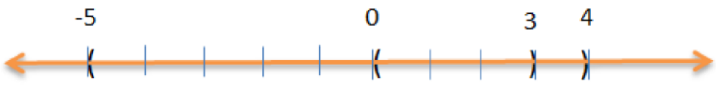
Conjunto Solución: Representa el conjunto de valores, dentro del Dominio de Validez, que satisfacen la inecuación o ecuación planteada.

Dado que los resultados de la resolución de las inecuaciones son intervalos de números reales y estos son CONJUNTOS, podemos establecer entre ellos las operaciones entre conjuntos que son:

UNIÓN: El resultado de la Unión de dos intervalos es un intervalo que contiene a los elementos de uno o del otro. Se representa por el símbolo U puesto entre los intervalos correspondientes.

Ejemplo: (-5 , 3] U (0 , 4] = (-5 , 4]

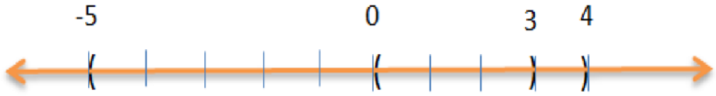
Representamos la situación en la recta numérica, de la siguiente forma:



INTERSECCIÓN: El resultado de la Intersección de dos intervalos es un intervalo que contiene a los elementos que pertenecen a AMBOS intervalos simultáneamente. Se representa por el símbolo ∩ puesto entre los intervalos correspondientes.

Ejemplo: (-5 , 3] ∩ (0 , 4] = (0 , 3]

Representamos la situación en la recta numérica, de la siguiente forma:



Existe un conjunto especial, llamado ***"Vacío"*** que se nombra con el símbolo ø y se define como el conjunto que NO contiene ningún elemento.

ACTIVIDAD:

1. Teniendo en cuenta el resultado de la inecuación anterior,

$$x \geq -4$$

Graficar el conjunto solución en la recta real

Observación: El conjunto solución puede ser expresado utilizando notación de intervalos. En el ejemplo, el conjunto solución estaría dado por el intervalo $[-4;+\infty)$

2. Consideremos la siguiente inecuación:

$$-3x+8 \geq -3 \cdot (x+5)+30$$

¿Cuál es su conjunto solución?

....

3. Dada la inecuación:

$$\frac{2x+5}{2} \leq 3+x$$

¿Cuál es su conjunto solución?

....

Hay situaciones en las que los valores requeridos deben satisfacer dos condiciones a la vez o simplemente alguna de ellas. Veamos cómo proceder en cada uno de estos casos.

Ejemplo 1:

Encontrar los valores reales de x que satisfacen:

$$\frac{1}{2}x-2<2 \quad y \quad -2x \leq 10 \quad (ambas\ deben\ satisfacerse\ a\ la\ vez)$$

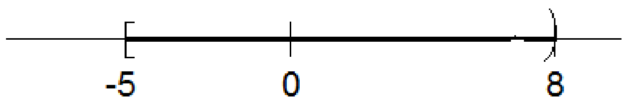
La solución de la primera inecuación está dada por {*x*∈**R**: *x*< 8} = (–∞, 8).

Por otra parte, para la segunda inecuación, el conjunto solución es: {*x*∈**R**: *x*≥ –5} = [–5, +∞).

La solución del ejercicio está dada por los *x* que satisfacen ambas inecuaciones a la vez, es decir, los valores de *x* que pertenecen a ambos conjuntos solución.

En símbolos: {*x* ∈ R: *x*< 8 y *x*≥ –5} = (–∞, 8) ∩ [–5, +∞) = [–5, 8).

Gráficamente:



Ejemplo 2:

$\frac{x+2}{3} \leq -2-x$ o $x-1 \geq 2$ (los valores de *x* deben satisfacer al menos una de las inecuaciones)

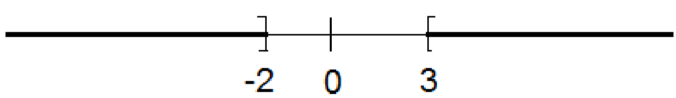
La solución de la primera inecuación está dada por {*x*∈**R**: *x*≤ –2} = (–∞, –2].

Por otra parte, para la segunda ecuación, el conjunto solución es: {*x*∈**R**: *x*≥ 3} = [3, +∞).

La solución del ejercicio está dada por los *x* que satisfacen al menos una de las inecuaciones, es decir, los valores de *x* que pertenecen a un conjunto solución **o** al otro.

En símbolos: {*x* ∈ R: *x*≤ –2 o *x*≥ 3} = (–∞, –2] U [3, +∞).

Gráficamente:



CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 2.V

1) Hallar el conjunto solución en cada caso y representarlo en la recta numérica

a) $3-2(a-3)\leq 2(a+2)$

b) $\frac{x-3}{2}<\frac{x+2}{-3}$

c) $\frac{x-1}{2}>\frac{1-2x}{3}\quad o\quad \frac{1}{2}(x-2)<\frac{1}{3}x+5$

d) $5z-8>2\quad y\quad z\leq -5$

e) $x^2-5x-6\ \leq 0$

f) $\frac{2x}{x+3}>4$

2) Plantear y resolver los siguientes problemas

a) Las edades de Hernán, Darío y Guido suman más de 52 años. Hernán es un año menor que Guido y tres años mayor que Darío ¿Hernán, es mayor de edad?

b) Averiguar el o los números enteros tales que su triplo menos 6 es mayor que su mitad aumentada en 4 y su cuádruplo aumentado en 8 es menor que su triplo aumentado en 15

3 TRABAJO PRÁCTICO INTEGRADOR DE ECUACIONES E INECUACIONES

1) Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado y escribir el conjunto solución:

a. $5.(y-1)+16.(2y+3)=3.(2y-7)$

b. $7.(18-p)-6.(3-5p)=-(7+9)-3(2p+5)-12$

c. $(y-1)(2+y)=5-y(4-y)-2y$

d. $(x-5)^2=2x(x-5)$

2) Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2+2x-4=0$

b) $(x+3)(x-1)=4x-3$

c) $\frac{x-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{8}}{x+\sqrt{3}}$

d) $\left(x+2\sqrt{10}\right)\cdot\left(x-\sqrt{40}\right)=\sqrt{36}$

e) $\frac{2x-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{18}+2x}$

f) $6\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)=x^2+3$

3) Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones e identificar cuáles de ellas son equivalentes:

$$\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16} \qquad \left(\frac{5}{6}x+3\right)^2=5x+8$$

$$-3(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0 \qquad 3x^2+3(3x-1)=2(3x+2x^2)-13$$

$$w^2-\frac{1}{2}w-\frac{1}{2}=0 \qquad -\frac{1}{2}x^2=-\frac{3}{2}x-5$$

4) Responder:

a. ¿Es posible encontrar valores de *x* que satisfagan $(x+3)(x-3)=5(x+2)+31$ y al mismo tiempo?

b. ¿Es posible encontrar valores de *t* que satisfagan $8t^2=-4t$ y a la vez?

5) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a. El conjunto solución de la ecuación $\frac{2x^2-x}{x}=-15$ está dado por {0, –7}.

b. El par (x, y) = (5, 2) es solución de la ecuación $3x^2 - 2y = 51 + 10y$.

c. Las ecuaciones $\frac{(a+3)^2}{a+3} = 0$ y $a + 3 = 0$ son equivalentes.

6) Identificar a qué tipo de ecuación corresponde a cada problema y resolverlo.

a) De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido; después, la tercera parte del resto y quedan aún 1.600 litros. Calcular la capacidad del depósito.

b) Hallar dos números naturales impares consecutivos tales que su producto sea 255.

c) Hallar la longitud de cada lado del triángulo de la figura 1, sabiendo que su perímetro es de 42 cm

d) Un rectángulo tiene por dimensiones el triple y el quíntuplo del lado de un cuadrado. Calcula las dimensiones de ambos cuadriláteros, sabiendo que la diferencia entre sus áreas es de 2058 cm2.

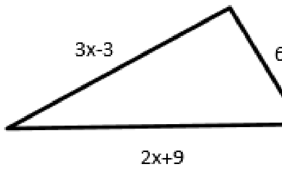
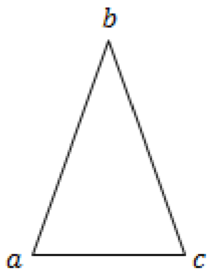


Figura 1 para el incis

e) El perímetro del triángulo isósceles de la figura 2, es 19 cm y los lados iguales son $\underline{abybc}$. Hallar la longitud del lado $\underline{ac}$

f) ¿Cuál es el número real, tal que su inverso sumado al cuadrado de su inverso, da por resultado 6?

g) En un hotel de 2 pisos hay 48 habitaciones. Si las habitaciones del segundo piso son la mitad de las del primero, ¿cuántas habitaciones hay en cada piso?



$\overline{ab} = 2x + 3\ cm$

$\overline{bc} = 3x + 2\ cm$

Figura 2 para el inciso e

h) Se ha comprado un traje, un bastón y un sombrero por $259. El traje costó 8 veces lo que el sombrero y el bastón $30 menos que el traje. Hallar los precios respectivos.

i) Dos ángulos suman 180° y el duplo del menor excede en 45°al mayor. Hallar los ángulos

j) El número de días que ha trabajado Pedro es 4 veces el número de días que ha trabajado Enrique. Si Pedro hubiera trabajado 15 días menos y Enrique 21 días más, ambos habrían trabajado igual número de días. ¿Cuántos días trabajó cada uno?

k) Un padre da a su hijo, 16 problemas para resolver con la condición de que: por cada problema que resuelva el muchacho recibirá 12 pesos y por cada problema que no resuelva perderá 5 pesos. Después de trabajar en los 16 problemas el muchacho recibe 73 pesos. ¿Cuántos problemas resolvió y cuántos no resolvió?

l) Una sala tiene doble largo que ancho. Si el largo se disminuye en 6 metros y el ancho se aumenta en 4 metros, la superficie de la sala no varía. Hallar las dimensiones de la sala.
El cuádruplo de un número excede en 19 a la mitad del número aumentada en 30. Hallar el número.

m) Un grupo de turistas contrata una excursión a razón de $90 por persona. Al salir, se encuentran con que desistieron 3 turistas y la empresa les informa (a los que van a viajar) que deben abonar $1 más por persona. ¿Cuántas personas hacen la excursión?

7) Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias

a) $\frac{1}{x+3} = \frac{x^2+1}{x^2-9} - \frac{3}{x-3}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = -\frac{x+1}{x^2+x}$

c) $\frac{x^2+15}{x^2-9} + \frac{4}{x+3} = \frac{2}{x-3}$

8) Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $2(x-3)+5x < x+4$

b) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}(4-x) > 3(x-1)$

c) $\frac{2}{5}(x-5)+1 < 3x - \frac{2}{3} - \frac{3}{5}x$

d) $3x - \sqrt{\frac{16}{9}} - x < \frac{2}{3}(9x-1)$

9) Resolver los siguientes problemas:

a) La suma de dos números reales debe ser menor o igual que 20 y sabemos que uno es la mitad del otro. ¿A qué intervalo pertenecerá el primero de dichos números?

b) La empresa distribuidora de gas calcula el costo de cada factura con un valor fijo de \$23 a lo que le adiciona el consumo, a razón de \$0,15 por m^3 de gas consumido. Si una familia viene abonando facturas que oscilan entre \$155 y \$ 188, ¿entre qué valores está oscilando el consumo de gas?

c) Determinar el o los valores de b para que la ecuación $4x^2 + bx + 1 = 0$ no tenga raíces reales.

d) Si la ecuación $3x^2 + b.(x-2) + 1 = 0$, tiene como raíces dos números que sumados dan como resultado 6, ¿cuál es el valor de b?

UNIDAD 3 - FUNCIONES

ANOTADOR DE CONSULTAS

1 FUNCIONES: GENERALIDADES

1.1 FUNCIONES A NUESTRO ALREDEDOR

En casi todos los fenómenos físicos observamos que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura de una persona depende de su edad, la temperatura depende de la fecha (vea Figura 1). Usamos el término *función* para describir esta dependencia de una cantidad con respecto a otra. Esto es, decimos lo siguiente:

- La estatura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.

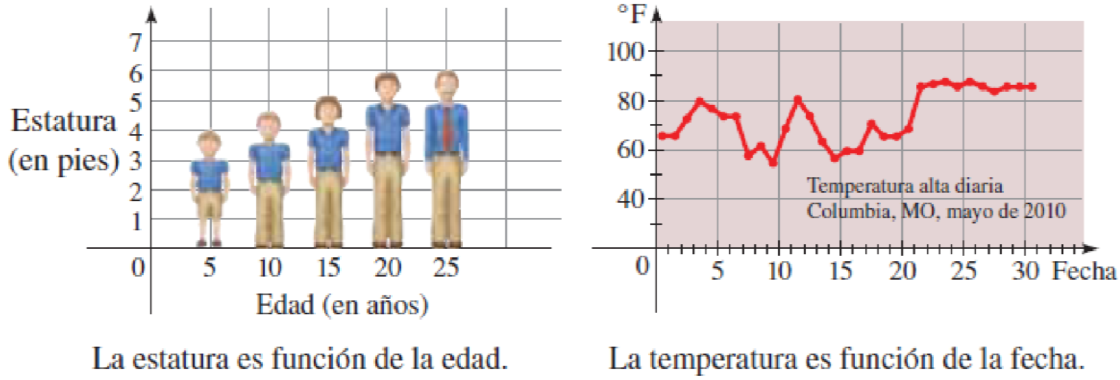


Figura 1. Graficas de diferentes funciones

¿Puede usted considerar otras funciones? Veamos a continuación algunos ejemplos:

- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es función del tiempo.
- El peso de una astronauta es una función de su elevación.
- El precio de una mercancía es una función de la demanda de esa mercancía.

La regla que describe la forma en que el área A de un círculo depende de su radio r está dada por la fórmula $A = \pi r^2$. Aun cuando no exista una regla o fórmula precisa que describa una función, todavía podemos describir la función por medio de una gráfica. Por ejemplo, cuando abrimos la llave del agua caliente de una llave, la temperatura del agua depende de cuánto tiempo haya estado saliendo el agua. Por tanto, podemos decir:

- La temperatura del agua de la llave es una función del tiempo.

  La Figura 2 muestra una gráfica aproximada de la temperatura T del agua como función del tiempo t que haya transcurrido desde que se abrió la llave. La gráfica muestra que la temperatura inicial del agua es cercana a la temperatura ambiente. Cuando el agua del tanque de agua caliente llega a la llave, la temperatura T del agua aumenta rápidamente. En la siguiente fase, T es constante a la temperatura del agua del tanque. Cuando éste se descarga, T disminuye a la temperatura del agua fría de alimentación.

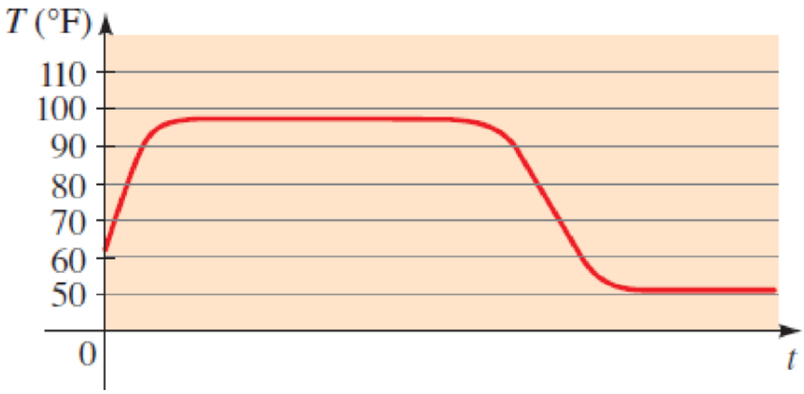


Figura 2: Gráfica de la temperatura T del agua en función del tiempo t.

1.2 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Una función es una regla. Para hablar de una función, es necesario darle un nombre. Usaremos letras como $f, g, h, \ldots$ para representar funciones. Por ejemplo, podemos usar la letra *f* para representar una regla como sigue:

"f" es la regla "elevar al cuadrado el número"

Cuando escribimos $f(2)$ queremos decir "aplicar la regla f al número 2". La aplicación de la regla da $f\ (2)\ = 2^2 = 4$. Del mismo modo, $f\ (3)\ = 3^2 =\ 9, f\ (4)\ = 4^2 = 16$, y en general $f\ (x)\ = x^2$.

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

UNA FUNCIÓN $\boldsymbol{f}$ ES UNA REGLA QUE ASIGNA A CADA ELEMENTO $\boldsymbol{x}$ DE UN CONJUNTO *A* EXACTAMENTE UN ELEMENTO, LLAMADO $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, DE UN CONJUNTO *B*.

Por lo general consideramos funciones para las cuales los conjuntos *A* y *B* son conjuntos de números reales. El símbolo $f\ (x)$ se lee "$f\ de\ x$" o "$f\ en\ x$" y se denomina **valor de** $f\ en\ x$, o la **imagen de** $x\ bajo\ f$. El conjunto *A* recibe el nombre de **dominio** de la función. La **imagen** de *f* es el conjunto de todos los valores posibles de $f\ (x)$ cuando *x* varía en todo el dominio, es decir,

Imagen de $f = \{f\ \ (x) / \ x\ \in\ A\}$.

El símbolo que representa un número arbitrario del dominio de una función *f* se llama **variable independiente**. El símbolo que representa un número en la imagen de *f* se llama **variable dependiente**. Por tanto, si escribimos *y* =*f* (*x*), entonces "*x*" es la variable independiente e "*y*" es la variable dependiente.

Otra forma de representar una función es por medio de un **diagrama de flecha** como en la Figura 4. Cada flecha conecta un elemento de *A* con un elemento de *B*. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con $x, f\ (a)$ está asociada con a, y así sucesivamente.

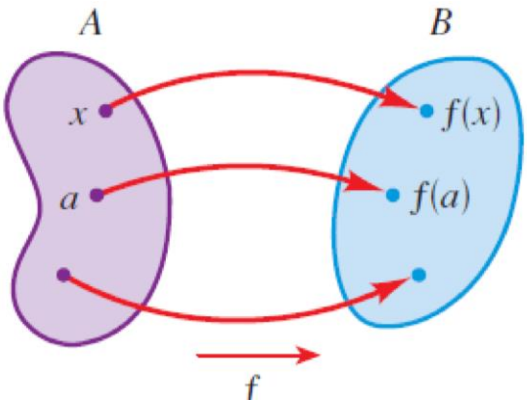


Figura 3: Diagrama de flecha.

EJEMPLO 1 Análisis de una función

Una función *f* está definida por la fórmula

$$f\ (x)\ = x^2\ + 4$$

(a) Exprese verbalmente cómo actúa *f* sobre la entrada *x* para producir la salida *f* (*x*).

(b) Evalúe $f\ (3), f\ (-2)\ y\ f(\sqrt{5})$

(c) Encuentre el dominio e imagen de *f*.

SOLUCIÓN

(a) La fórmula nos dice que *f* primero eleva al cuadrado la entrada *x* y luego suma 4 al resultado. Por tanto, *f* es la función “elevar al cuadrado, luego sumar 4”

(b) Los valores de f se encuentran al sustituir por *x* en la fórmula $f\ (x) =\ x^2 + 4$.

$\boldsymbol{f(3) =\ (3)^2 + 4 =\ 13}$	*Sustituir* $\boldsymbol{x\ por\ 3}$
$\boldsymbol{f(-2) =\ (-2)^2\ + 4 =\ 8}$	*Sustituir* $x\ por - 2$
$\boldsymbol{f(\sqrt{5}) =\ (\sqrt{5})^2 + 4 =\ 9}$	*Sustituir* $x\ por\ \sqrt{5}$

(c) El dominio de *f* está formado por todas las posibles entradas para *x*. Como podemos evaluar la fórmula $f\ (x) = x^2\ = 4$ para cada número real *x*, el dominio de *f* es el conjunto de todos los números reales.

La imagen de *f* está formada por todas las posibles salidas de *f*. Como $x^2\ \geq\ 0$ para todos los números reales *x*, tenemos $x^2 + 4\ \geq\ 4$, de modo que por cada salida de f tenemos $f\ (x)\ \geq\ 4$. Entonces, el rango de f es $\{y|y\ \geq\ 4\}\ =\ \{4, \infty)$.

1.3 EVALUACIÓN DE UNA FUNCIÓN

En la definición de una función, la variable independiente x desempeña el papel de un símbolo o dígito. Por ejemplo, la función $f\ (x) = 3x^2 + x - 5$ se puede considerar como:

$$f(\square)=3.\square^{2}+\square - 5$$

Para evaluar *f* en un número, sustituimos el número por el símbolo o dígito.

EJEMPLO 2: Evaluación de una función

Sea $f\ (x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de la función.

$$(a) f(-2) \qquad (b)\ f(0) \qquad (c)\ f(4) \qquad (d)\ f\left(\frac{1}{2}\right)$$

SOLUCIÓN

Para evaluar f en un número, sustituimos el número por x en la definición de f.

(a) $f(-2) = 3.(-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

(b) $f(0) = 3.(0)^2 + 0 - 5 = -5$

(c) $f(4) = 3.(4)^2 + 4 - 5 = 5$

(d) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) - 5 = -\frac{15}{4}$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.I

1) Exprese la función (o regla) en palabras $\boldsymbol{h(x) = x^2 + 2}$

a. Evalúe la función en $\boldsymbol{x = 2}$

2) Evalúe la siguiente función en los valores: $\boldsymbol{f(-3), f(3), f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(10)}$

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6}$$

3) Encuentre el dominio de la función

$$\boldsymbol{f(x) = 2x}$$

4) Evalúe la función en los valores indicados

$$\boldsymbol{f(x) = 2x + 1 \qquad en \qquad f(1), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right), f(a), f(-a), f(a+b)}$$

i.

EJEMPLO 3: Una función definida por tramos

Un plan de teléfono celular cuesta $39 al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cobra $0.20 por cada minuto adicional de uso. Los cargos mensuales son una función del número de minutos usados, dada por:

$$C(x) = \begin{cases} 39 & si\ 0 \le x \le 400 \\ 39 + 0.20(x - 400) & si\ x > 400 \end{cases}$$

Encuentre $C(100), C(400)\ y\ C(480)$.

SOLUCIÓN

Recuerde que una función es una regla. He aquí cómo aplicamos la regla para esta función. Primero vemos el valor de la entrada $x. Si\ 0 \le x \le 400$, entonces el valor de $C(x)$ es 39. Por otra parte, si $x > 400$, entonces el valor de $C(x)$ es $39 + 0.20\ ((x - 400)$.

Como $100 \le 400$, tenemos $C(100) = 39$.

Como $400 \le 400$, tenemos $C(400) = 39$.

Como $480 < 400$, tenemos $C(480) = 39 + 0.20(480 - 400) = 55$.

Por tanto, el plan cobra $39 por 100 minutos, $39 por 400 minutos y $55 por 480 minutos.

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.II

Dada la función por partes,

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x < 0 \\ x + 1 & si\ x \ge 0 \end{cases}}$$

Evaluar en los siguientes valores:

$$\boldsymbol{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)}$$

EJEMPLO 4: El peso de una astronauta

Si una astronauta pesa 130 libras en la superficie de la Tierra, entonces su peso cuando esté a *h* millas sobre la Tierra está dado por la función:

$$w(h) = 130\left(\frac{3960}{3960 + h}\right)^2$$

(a) ¿Cuál es su peso cuando está a 100 millas sobre la Tierra?

(b) Construya una tabla de valores para la función w, que da el peso de la astronauta a altitudes de 0 a 500 millas. ¿Qué se concluye a partir de la tabla?

SOLUCIÓN

(a) Buscamos el valor de la función w, cuando h =100; esto es, debemos calcular $w(100)$.

$$w(100) = 130\left(\frac{3960}{3960 + 100}\right)^2 \approx 123.67$$

Entonces, a una altitud de 100 millas, ella pesa unas 124 lb.

(b) La tabla da el peso de la astronauta, redondeado a la libra más cercana, en incrementos de 100 millas. Los valores de la tabla están calculados como en (a).

H	w(h)
0	130
100	124
200	118
300	112
400	107
500	102

La tabla indica que cuanto más alto se encuentre ella, menor es su peso.

1.4 DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Recuerde que el *dominio* de una función es el conjunto de todas las entradas para la función. El dominio de una función puede indicarse explícitamente. Por ejemplo, si escribimos

$$f\,(x) = x^2 \qquad 0 \leq x \leq 5$$

entonces el dominio es el conjunto de todos los números reales *x* para los cuales 0 ≤ *x* ≤ 5.

Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se indica explícitamente, entonces por convención *el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica, es decir, el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión está definida como un número real.* Por ejemplo, considere las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x-4} \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x}$$

La función *f* no está definida en *x* = 4, de modo que su dominio es:

$$\{x \mid x \neq 4\} \qquad o \qquad Dom(f): x \in (-\infty; 4)(4; +\infty)$$

La función g no está definida para *x* negativa, de modo que su dominio es:

$$\{x \mid x \geq 0\} \qquad o \qquad Dom(f): x \in [0; +\infty).$$

EJEMPLO 5: Hallar dominios de funciones

Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ **(b)** $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **(c)** $h(t) = \frac{t}{\sqrt{t+1}}$

SOLUCIÓN

(a) Una expresión racional no está definida cuando el denominador es 0. Como

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

vemos que $f\ (x)$ no está definida cuando $x = 0\ o\ x = 1$. Entonces, el dominio de la función es:

$$Dom(f) = \{x\ | x \neq 0, x \neq 1\}$$

El dominio también se puede escribir en notación de intervalos como:

$$Dom(f) = x\ \in\ (\infty, 0)\ \cup\ (0,1)\ \cup\ (1, \infty)$$

(b) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, de modo que debemos tener

$$9 - x^2\ \geq\ 0$$

Podemos resolver esta desigualdad para hallar que $-3\ \leq\ x\ \leq\ 3$. Por lo tanto, el dominio de g es

$$\{x|\ -3 \leq x \leq 3\}\ =\ [-3, 3]$$

(c) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, y no podemos dividir entre 0, de modo que debemos tener $t\ +\ 1\ >\ 0$, es decir, $t\ >\ -1$. Por lo tanto, el dominio de h es

{t | t > -1 } = (-1, ∞).

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.III

Encuentre el dominio de las siguientes funciones

(a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x-3}}$

(b) $\boldsymbol{w(x) = \sqrt{x - 5}}$

1.5 CUATRO FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

Para ayudarnos a entender lo que es una función, hemos empleado diagramas de flecha. Podemos describir una función específica en las siguientes cuatro formas:

- Verbalmente (por descripción en palabras)
- Algebraicamente (por una fórmula explícita)
- Visualmente (por una gráfica)
- Numéricamente (por una tabla de valores)

Una función individual puede estar representada en las cuatro formas, y con frecuencia es útil pasar de una representación a otra para adquirir más conocimientos sobre la función.

No obstante, ciertas funciones se describen en forma más natural por medio de un método que por los otros. Un ejemplo de una descripción verbal es la siguiente regla para convertir entre escalas de temperatura: "Para hallar el equivalente Fahrenheit de una temperatura Celsius, multiplicar por $\frac{9}{5}$ la temperatura Celsius y luego sumar 32."

Una representación útil del área de un círculo como función de su radio es la fórmula algebraica: $A(r) = \pi r^2$

La gráfica producida por un sismógrafo es una representación visual de la función de aceleración vertical $a\,(t)$ del suelo durante un terremoto. Como un ejemplo final, considere la función *C* (w), que se describe verbalmente como “el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso”. La forma más conveniente de describir esta función es numéricamente, es decir, usando una tabla de valores.

CUATRO FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

VERBAL

USANDO PALABRAS: “PARA CONVERTIR DE GRADOS CELSIUS A FAHRENHEIT, MULTIPLICAR LA TEMPERATURA CELSIUS POR $\frac{9}{5}$, LUEGO SUMAR 32.”

RELACIÓN ENTRE ESCALAS DE TEMPERATURA CELSIUS Y FAHRENHEIT.

ALGEBRAICA

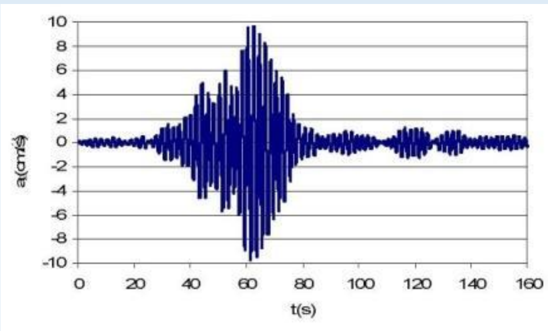
USANDO UNA FÓRMULA:

$$A(r) = \pi r^2$$

ÁREA DE UN CÍRCULO.

VISUAL

USANDO UNA GRAFICA



ACELERACIÓN VERTICAL DURANTE UN TERREMOTO

NUMÉRICA

USANDO UNA TABLA DE VALORES

$\boldsymbol{w(onzas)}$	$\boldsymbol{C(w)(dólares)}$
$\mathbf{0 < w \leq 1}$	1.22
$\mathbf{1 < w \leq 2}$	1.39
$\mathbf{2 < w \leq 3}$	1.56
$\mathbf{3 < w \leq 4}$	1.73
$\mathbf{4 < w \leq 5}$	1.90
⋮	⋮

COSTO DE ENVIAR POR CORREO UN PAQUETE DE PRIMERA CLASE.

EJEMPLO 6: Representar una función verbal, algebraica, numérica y gráficamente.

Sea $f\,(C)$ la temperatura Fahrenheit correspondiente a la temperatura Celsius *C*. (Así, *F* es la función que convierte entradas Celsius en salidas Fahrenheit.) El cuadro citado líneas antes da una descripción verbal de esta función. Encuentre formas de representar esta función

(a) Algebraicamente (usando una fórmula)

(b) Numéricamente (usando una tabla de valores)

(c) Visualmente (usando una gráfica)

SOLUCIÓN

(a) La descripción verbal nos dice que primero debemos multiplicar la entrada *C* por $\frac{9}{5}$ y luego sumar 32 al resultado.

$$f(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

(b) Usamos la fórmula algebraica para *F* que encontramos en la parte (a) para construir una tabla de valores:

C (Celsius)	F (Fahrenheit)
−10	14
0	32
10	50
20	68
30	86
40	104

(c) Usamos los puntos tabulados en la parte (b) para ayudarnos a trazar la gráfica de esta función en la Figura 4.

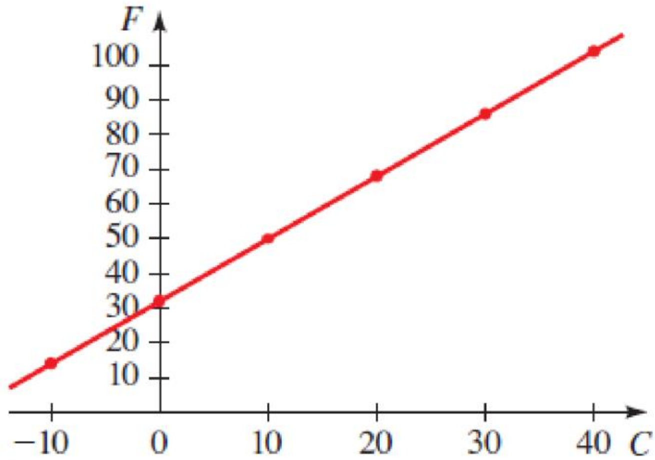


Figura 4: Gráfica de la función buscada.

1.6 Ejercitación de Funciones

1. Para la siguiente descripción verbal de una función, encuentre representaciones:

a. Algebraica

b. Numérica

c. Gráfica

"Para evaluar $f(x)$, divida la entrada en 3 y sume $\frac{2}{3}$ al resultado".

2. Completar con lo que corresponda:

a. Si una función *f* está dada por la fórmula $y = f(x)$, entonces $f(a)$ es la ____________ de f en $x = a$.

b. Para una función f, el conjunto de todas las posibles entradas se denomina ________ de f, y el conjunto de todas las posibles salidas se denomina ____________ de f.

3. Dadas las siguientes funciones,

$$g(x) = x^2 - 3x \qquad h(x) = \frac{x-5}{x} \qquad j(x) = \sqrt{x-10}$$

(a) ¿Cuáles de ellas tienen a x=5 en sus dominios?

(b) Para las funciones de la parte (a) que tienen 5 en sus dominios, encuentre el valor de la función en x=5

4. Una función está dada algebraicamente por la fórmula $f\,(x) = (x - 4)^2 + 3$. Complete estas otras formas de representar a f:

(a) *Verbal:* "Restar 4, luego ____________ y ________________.

(b) *Numérica:*

x	$f(x)$
0	19
2	
4	
6	

5. Exprese la función (o regla) en palabras.

(a) $h(x) = x^2 + 2$

(b) $f(x) = \frac{x-4}{3}$

(c) $k(x) = \sqrt{x+2}$

(d) $g(x) = \frac{x}{3} - 4$

6. Complete las siguientes tablas

(a) $f(x) = 2(x-1)^2$

x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	

(b) $f(x) = 2(x-1)^2$

x	$f(x)$
-3	
-2	
0	
1	
3	

7. Evalúe la función $w(x) = x^3 + 2x$, en los valores indicados a continuación

$$w(-2), w(1), w(0), w\left(\frac{1}{3}\right), w(0.2)$$

8. Evalúe la función definida por tramos en los valores indicados.

(a) $g(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x < 0 \\ x+1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$ $\quad g(-2), g(-1), g(0), g(1), g(2)$

(b) $g(x) = \begin{cases} 5 & si\ x \leq 2 \\ 2x-3 & si\ x > 2 \end{cases}$ $\quad h(-3), h(0), h(2), h(3), h(5)$

(c) $g(x) = \begin{cases} 3x & si\ x < 0 \\ x+1 & si\ 0 \leq x \leq 2 \\ (x-2)^2 & si\ x > 2 \end{cases}$ $\quad f(-5), f(0), f(1), f(2), f(5)$

9. Encuentre el dominio de la función

a) $f(x) = 2x$

b) $g(x) = 2x, \quad -1 \leq x \leq 5$

h) $m(t) = \sqrt[3]{t-1}$

i) $b(x) = \sqrt{2x-5}$

c) $h(x) = x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 5$

d) $i(x) = x^2 + 1$

e) $j(x) = \frac{1}{x-3}$

f) $k(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

g) $l(x) = \sqrt{x-5}$

j) $z(x) = \sqrt[4]{x^2 - 6x}$

k) $n(x) = \frac{3}{\sqrt{x-4}}$

l) $o(x) = \frac{1}{3x-6}$

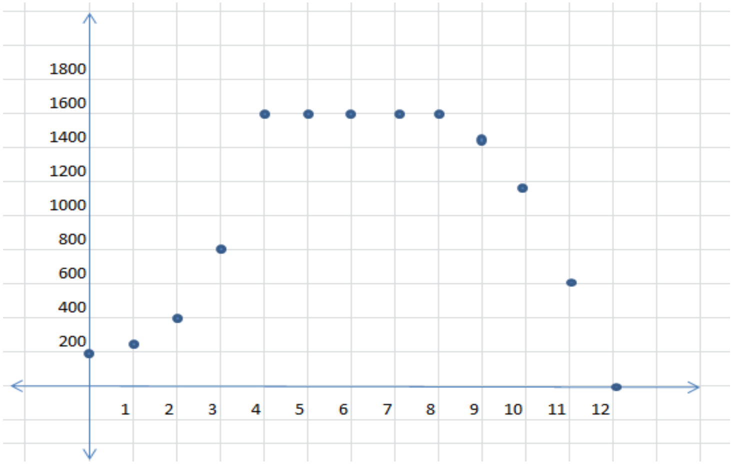
m) $p(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$

10. Se da una descripción verbal de una función. Encuentre representaciones: algebraica, numérica y gráfica para la función.

(a) Para evaluar f (x), divida la entrada entre 3 y sume 2/3 al resultado.

(b) Para evaluar g(x), reste 4 de la entrada y multiplique el resultado por 3/4.

11. El siguiente gráfico muestra cómo se reproduce una colonia de bacterias según pasa el tiempo en días



Observando el gráfico, responder:

a) ¿Cuántas bacterias integraban la colonia al inicio de la experiencia?

b) ¿Qué día había 400 bacterias en la colonia?

c) ¿Cuántas bacterias había el tercer día?

d) ¿durante qué tiempo hubo el máximo de bacterias en la colonia y cuál fue esa cantidad?

e) ¿Durante qué lapso de tiempo, la población de bacterias creció?

f) ¿A partir de qué día, la población de bacterias comenzó a decrecer?

g) ¿cuántos días la población se mantuvo disminuyendo?

h) ¿Cuántos días duró la experiencia?

i) ¿En algún tiempo, la población se mantuvo estable en cuanto a la cantidad de integrantes de la colonia? ¿Cuál fue ese tiempo?

12. Una empresa de taxis cobra \$15 la bajada de bandera y luego cobra \$3,50 por cada Km recorrido mientras que otra empresa cobra \$12 la bajada de bandera y luego \$4,20 cada Km recorrido.

a) Analizar cuál empresa nos cobra más barato si recorremos 2Km

b) Analizar cuál empresa nos cobra más barato si recorremos 6,5Km

c) ¿Para qué cantidad de kilómetros ambas empresas nos cobraran la misma tarifa?

d) Expresar las tarifas de ambas empresas como funciones y graficar en un mismo sistema de ejes.

e) A partir del gráfico realizado en el inciso anterior deducir hasta qué cantidad de Km recorridos nos conviene la primera empresa y a partir de qué cantidad de Km recorridos nos conviene la segunda empresa.

13. La distancia en metros que recorre un objeto que cae desde una altura determinada puede calcularse mediante la fórmula $f(t) = 5t^2$, donde t es el tiempo medido en segundos desde que comienza la caída.

a) Si la altura desde la que cae el objeto es 405 metros, ¿Cuál es el dominio de la función?

b) Si el dominio fueran todos los valores entre 0 y 7, la altura desde la que cayó el objeto ¿Es mayor o menor que en el caso original? ¿Cómo te das cuenta?

14. Si un rectángulo tiene $3m$ de perímetro, se puede calcular su altura A según la longitud B de la base, ambas en metros.

a) Completa la tabla:

B	0,5	0,8			1,4		
A			1	1,2		0,1	

b) ¿Hay algún valor que no pueda tomar la base? ¿Por qué?

c) ¿Cuál es el dominio de la función?

15. Un objeto cae desde cierta altura a una velocidad en cada instante estimada con la fórmula $v = 5t$, la variable v es la velocidad, medida en metros por segundo, y la variable t es el tiempo, medido en segundos, desde el inicio de la caída.

a) Completa la tabla de valores:

t	0	1	2	3	4	5	6	7
v								

b) Se sabe que el objeto tarda 10 segundos en llegar al suelo. ¿Con qué velocidad llega?

c) Construí un gráfico de esta función.

d) ¿Cuál es la imagen de la función? ¿Por qué?

e) ¿Cambiaría la imagen si el objeto tarda 15 segundos en llegar al suelo? ¿por qué?

16. Sean las funciones $f(x) = -2x + 5,\ g(x) = x^2 - 3x$ y $h(x) = \frac{2}{x}$

a) Hallar $\dfrac{f(3).g(-1)}{h(-4)}$.

b) Resolver las ecuaciones:

i. $g(x) = -2$

ii. $h(x) + h(x + 2) = 2$

iii. $f(-1) = g(x + 1)$

c) Armar una tabla de valores y representar gráficamente.

2 ESTUDIO PARTICULAR DE LA FUNCIÓN LINEAL

Una función lineal es una función polinómica, definida de reales en reales, de la siguiente forma:

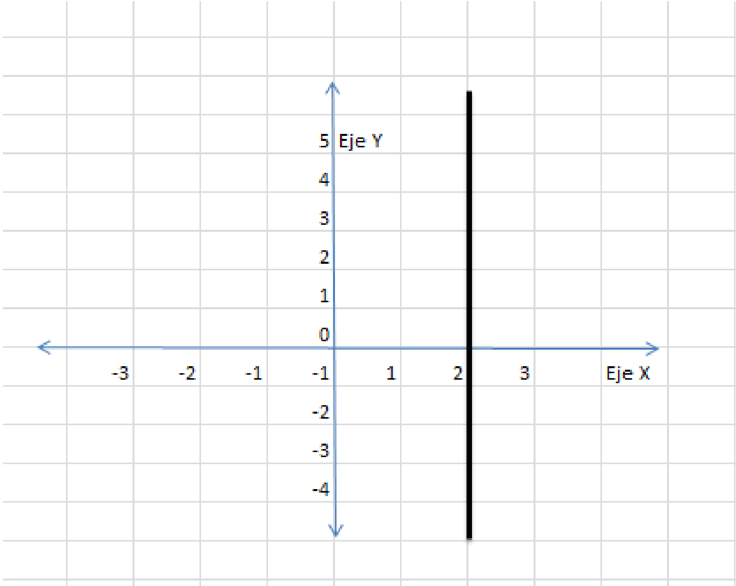
$$f : R \to R \ \ tal\ que\ f(x) = ax + b \qquad con\ \ a\,, b\ \in R$$

El dominio de una función lineal es R y la imagen es R. La gráfica de la función lineal es una recta. Ya hemos visto ejemplos de funciones lineales anteriormente.

<u>Observaciones importantes:</u>

1) Consideremos las rectas verticales, de la forma $x = a \quad con\ \ a \in R$

Por ejemplo la recta $x = 2$. Su gráfica sería:



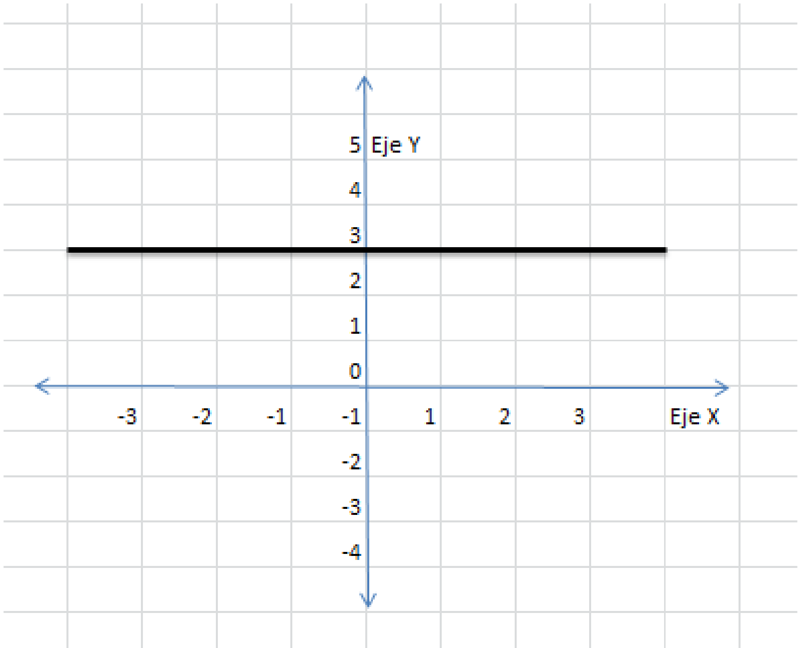
Dijimos que para que una relación sea función se debe cumplir que para cada "x" del dominio hay un único "y" en la imagen.

En este caso, el valor x=2 tiene infinitas imágenes. En todos los pares ordenados de la relación aparecerá el número 2 en el primer lugar asociado a cada valor que queramos tomar del eje Y

Podemos concluir, entonces, que NO ES FUNCION.

2) Consideremos las rectas horizontales, de la forma $y = b \quad con \quad b \in R$

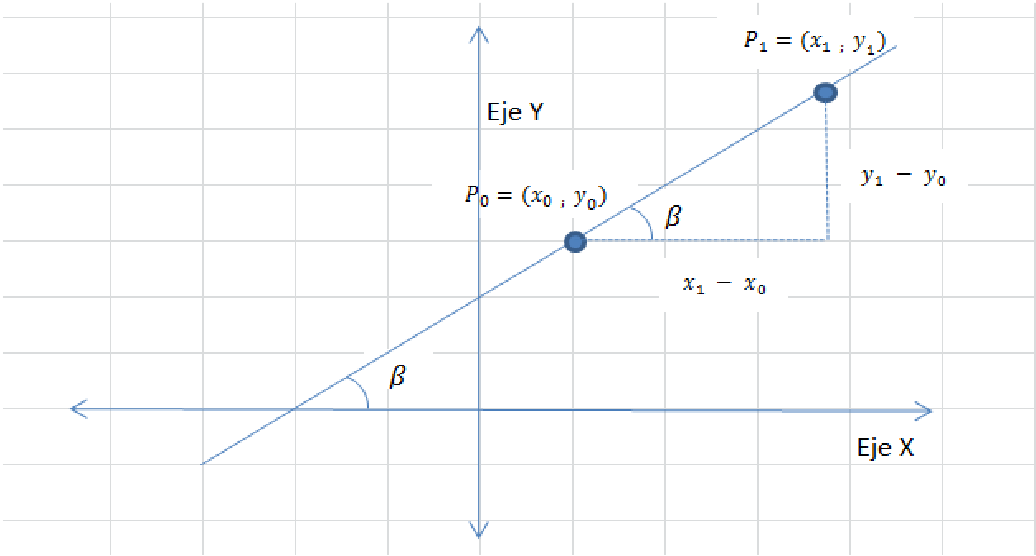
Por ejemplo la recta $y = 3$. Su gráfica sería:



Estos son dos casos especiales, aceptados en esta unidad y los llamaremos **FUNCIONES CONSTANTES.**

2.1 Pendiente de la Recta

El coeficiente $a \in R$ que figura en la expresión de una función lineal se llama PENDIENTE DE LA RECTA e indica la inclinación de la misma. Analizamos este concepto con el siguiente esquema gráfico:



Los puntos $P_0 = (x_0\ ;\ y_0)$ y $P_1 = (x_1\ ;\ y_1)$ pertenecen a la recta $y = ax + b$, por lo tanto:

$$y_1 = a\,x_1 + b$$

$$y_0 = a\,x_0 + b$$

Luego: $y_1 - y_0 = (ax_1 + b) - (a\,x_0 + b) = ax_1 - ax_0 = a\,(x_1 - x_0)$

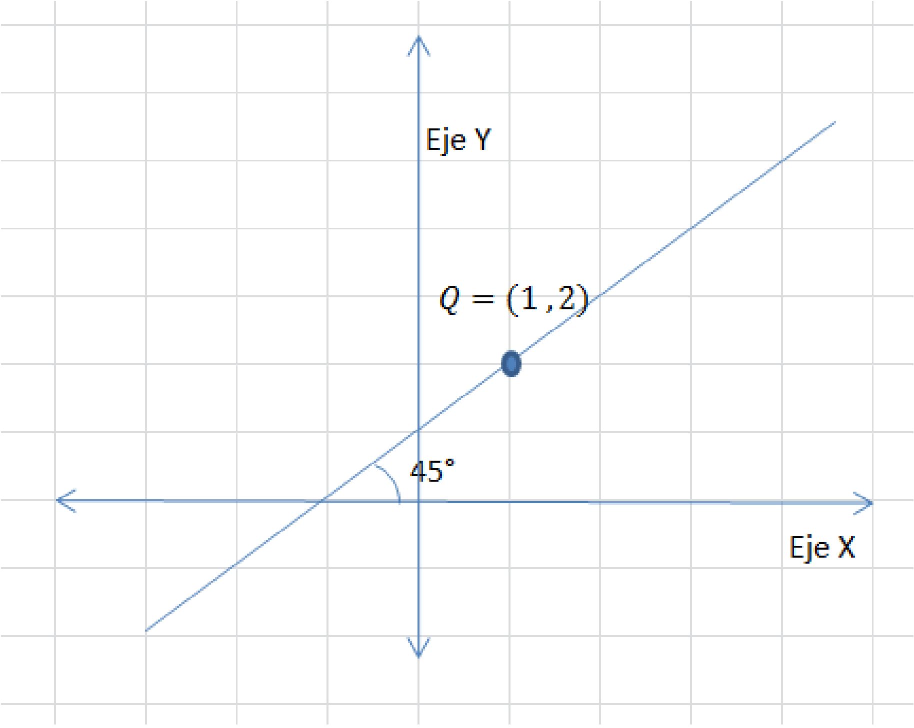
Es decir: $a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Por otro lado: $tg\ \beta = \frac{cat\ op}{cat\ ady} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Queda como conclusión que: $a = tg\ \beta$

Este es un dato muy importante, significa que la pendiente de una recta es la tangente del ángulo que ella forma con el eje X

EJEMPLO 1: Hallar la ecuación de la recta que forma una ángulo de 45° con el eje x y pasa por el punto $Q = (1\,,2)$



La recta buscada sería la que muestra el esquema.

Sabemos que $a = tg\,45° \implies a = 1$

La recta buscada tiene pendiente igual a 1, por lo cual tendría este formato: $y = x + b$.

Por otro lado nos piden que el punto $Q = (1\,,2)$ pertenezca a la recta buscada y esto significa que debe verificar su ecuación. Es decir que para el valor $x = 1$ debe resultar $y = 2$. Reemplazando en la primera propuesta de ecuación de la recta quedaría lo siguiente:

$$2 = 1 + b \;\Rightarrow 2 - 1 = b \;\Rightarrow\; b = 1$$

Ya se tienen todos los datos necesarios para armar la ecuación de la recta y ésta sería: $y = x + 1$

EJEMPLO 2: Indicar el ángulo que forma la recta $y = \sqrt{3}x - 4$ con el eje x

Sabemos que $a = tg\,\beta$ siendo β el ángulo que forma la recta con el eje X, es decir que: $tg\,\beta = \sqrt{3} \implies \beta = arc\,tg\,\sqrt{3} \;\Rightarrow \beta = 60°$

2.2 Intersección con los Ejes

Veremos ahora, la forma de encontrar las intersecciones con los ejes coordenados en una función lineal:

a) Dada la función lineal $y = ax + b$, la evaluaremos en el valor $x = 0$. Se tendrá, entonces que: $y = a\,.\,0 + b \;\Rightarrow\; y = b$. Por este razonamiento el punto $P = (0\,,b)$ pertenece a la función. Gráficamente, este punto es la intersección de la recta con el eje y y por esto llamaremos al número b , la ***"ordenada al origen"*** de la función lineal

b) Dada la función lineal $y = ax + b$, la evaluaremos en el valor $y = 0$. Se tendrá, entonces que: $0 = a\,.\,x + b \;\Rightarrow\; x = -\frac{b}{a}$. Por este razonamiento el punto $Q = (-\frac{b}{a},\ 0)$ pertenece a la función. Gráficamente, este punto es la intersección de la recta con el eje X y por esto llamaremos al número $x = -\frac{b}{a}$, la ***"raíz o cero"*** de la función lineal

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 2.I

1) Dada la función lineal $\boldsymbol{f(x) = -\frac{3}{2}x + 2}$

- **a)** Indicar Dominio e Imagen de la función, pendiente y ordenada al origen.
- **b)** Hallar los puntos de intersección con los dos ejes coordenados.
- **c)** Graficar.

2) Dadas las siguientes tablas de valores que representan funciones, indicar cuáles son lineales y cuáles no lo son. Justificar la elección.
Entre las que son lineales, ¿qué diferencias podríamos mencionar?

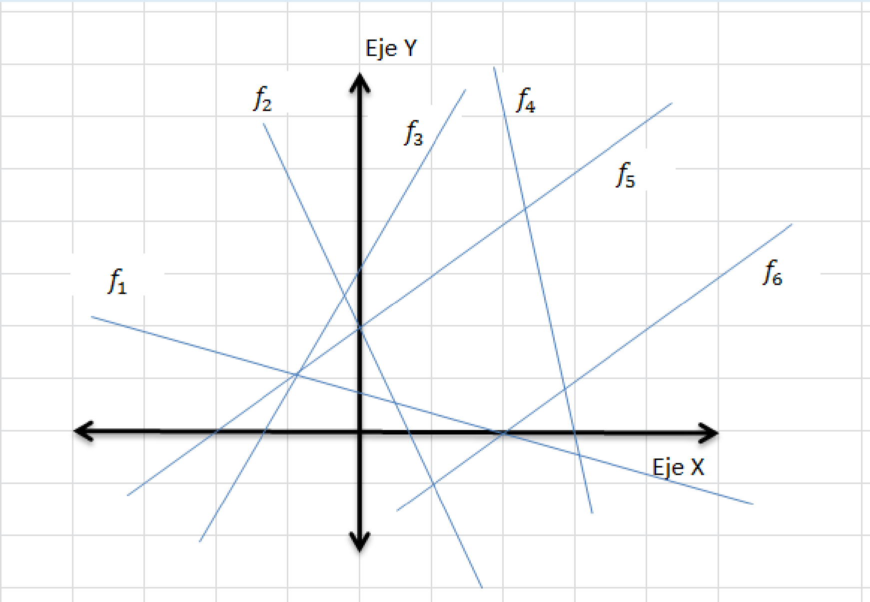
x	y
-2	-11
-1	-7
0	-3
1	1
2	5

x	y
-2	-1
-1	-2,5
0	-3
1	-2,5
2	-1

x	y
-2	5
-1	3
0	1
1	-1
2	-3

x	y
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5

3) Observando el siguiente gráfico que contiene varias funciones lineales, indicar:

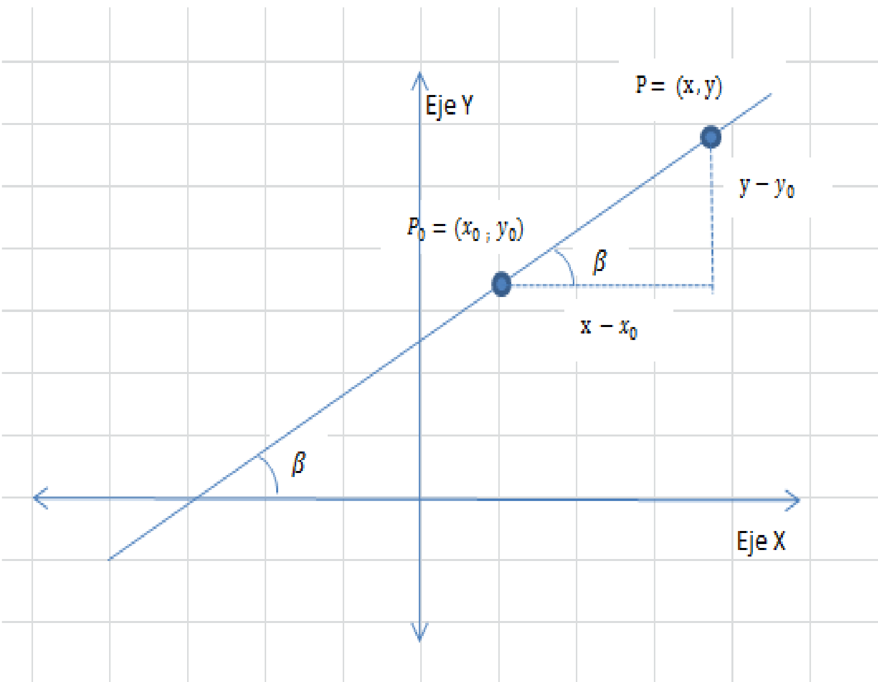


a) ¿cuáles tienen la misma pendiente?
b) ¿cuáles tienen la misma ordenada al origen?
c) ¿cuáles tienen raíz en $\boldsymbol{x = 3}$?
d) ¿cuáles tienen pendiente positiva?
e) ¿cuáles tienen pendiente negativa?
f) ¿cuáles tienen la misma raíz?

4) Dar la ecuación de una función lineal que forma un ángulo de 60° con el eje X y lo corte en $\boldsymbol{x = (-2)}$.

2.3 Ecuación de la recta

Continuamos estudiando la función lineal y veremos ahora la forma de hallar la ecuación de una recta si sabemos un punto por donde pasa y la pendiente.



Sea la recta $y = ax + b$ y un punto conocido de ella $P_0 = (x_0; y_0)$

Hemos dicho que la pendiente de la recta es la tangente del ángulo que ella forma con el eje “x”, es decir, $a = tan\beta$

Conclusión:

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Entonces: $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$

Esta es la forma de encontrar la ecuación de una recta conociendo su pendiente y un punto por el que pasa.

EJEMPLO 3:

Dar la ecuación de la recta que tiene pendiente igual a (-4) y pasa por el punto $S = (3\ ,\ 2)$

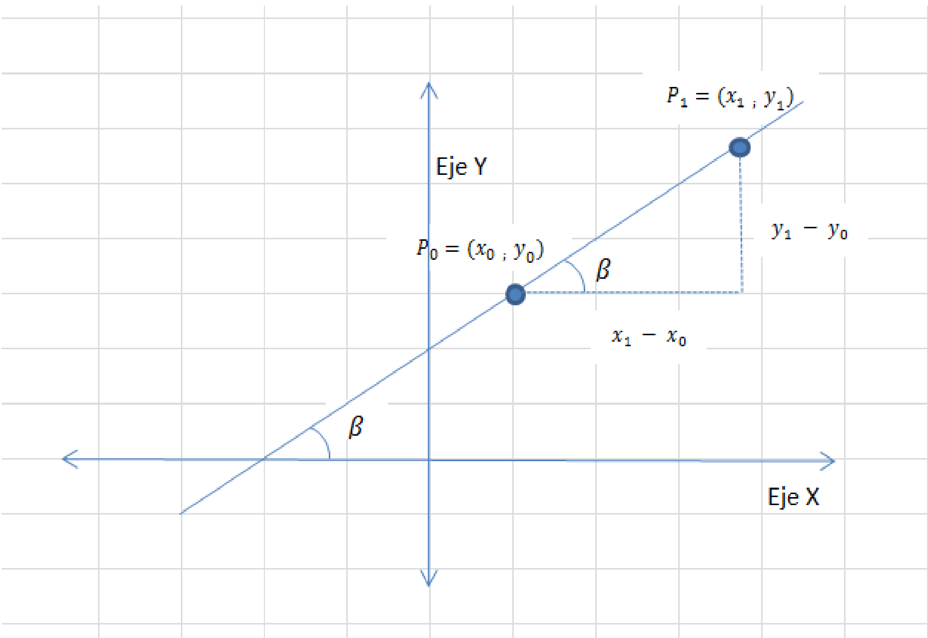
Los datos con que contamos son los siguientes: $a = (-4)$, $x_0 = 3$, $y_0 = 2$. Reemplazamos en la fórmula deducida y nos queda lo siguiente:

$$y - 2 = (-4)(x - 3) \implies y - 2 = -4x + 12 \implies y = -4x + 14$$

De esta forma la recta que buscábamos es $y = -4x + 14$

Como puede observarse fácilmente, esta recta tiene la pendiente pedida y también el punto S pertenece a ella.

Nos proponemos, ahora, encontrar la ecuación de una recta conociendo <u>dos puntos por los cuales pasa.</u>



Sea la ecuación de la recta $y = ax + b$ y tomamos dos puntos que pertenecen a ella: $P_0 = (x_0; y_0)$ y $P_1 = (x_1; y_1)$

Hemos dicho ya que:

$$a = tan\beta \implies a = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Utilizando la fórmula que hallamos anteriormente nos quedaría que:

$$y - y_0 = a\ .\ (x - x_0) \implies y - y_0 = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right).\ (x - x_0) \implies \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Entonces la fórmula para hallar la ecuación de la recta de la cual conocemos dos de sus puntos es:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

EJEMPLO 4:

Dar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (-4\ ,\ -1)$ y $B = (2\ ,\ 4)$

Los datos con que contamos son los siguientes:

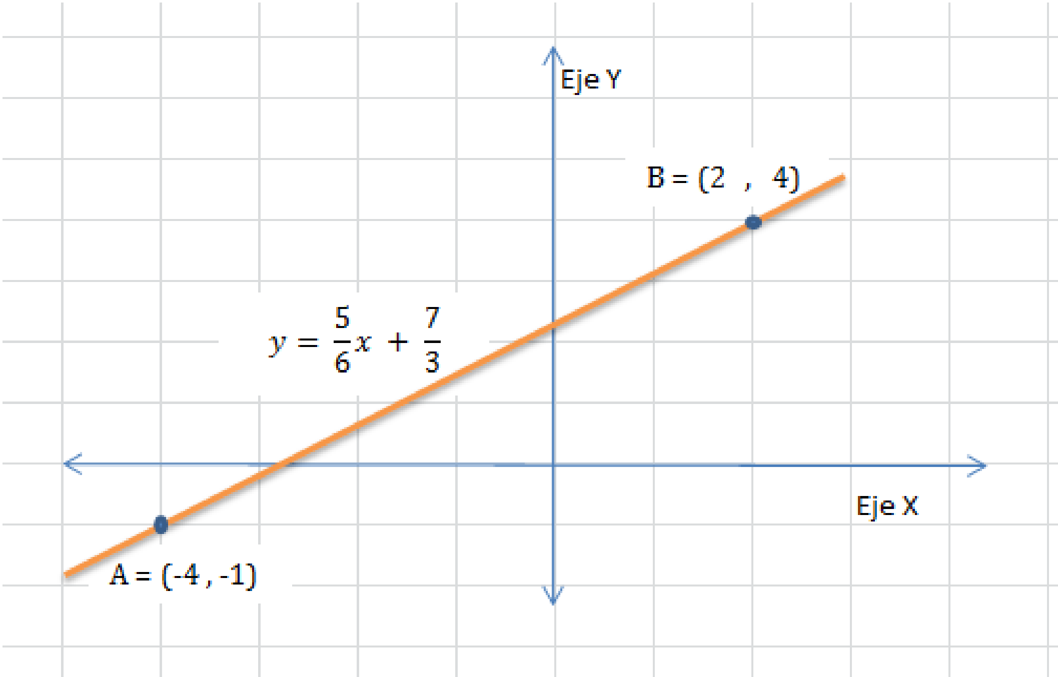
$$x_0 = (-4) \quad , \quad y_0 = (-1) \quad , \quad x_1 = 2 \quad , \quad y_1 = 4$$

Reemplazamos en la fórmula deducida y nos queda lo siguiente:

$$\frac{y - (-1)}{x - (-4)} = \frac{4 - (-1)}{2 - (-4)} \implies \frac{y + 1}{x + 4} = \frac{5}{6} \implies (y + 1).6 = 5.(x + 4) \implies 6y + 6 = 5x + 20$$

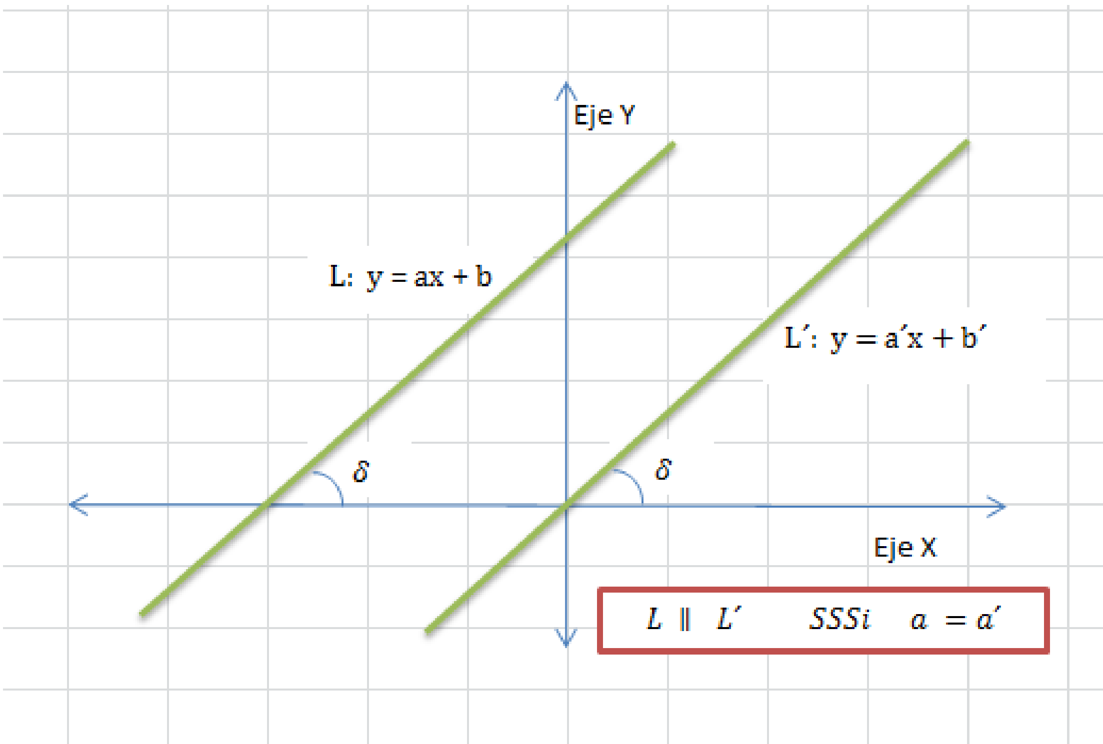
$$6y = 5x + 20 - 6 \implies 6y = 5x + 14 \implies y = \frac{5}{6}x + \frac{7}{3}$$

Es decir la ecuación de la recta buscada es: $y = \frac{5}{6}x + \frac{7}{3}$

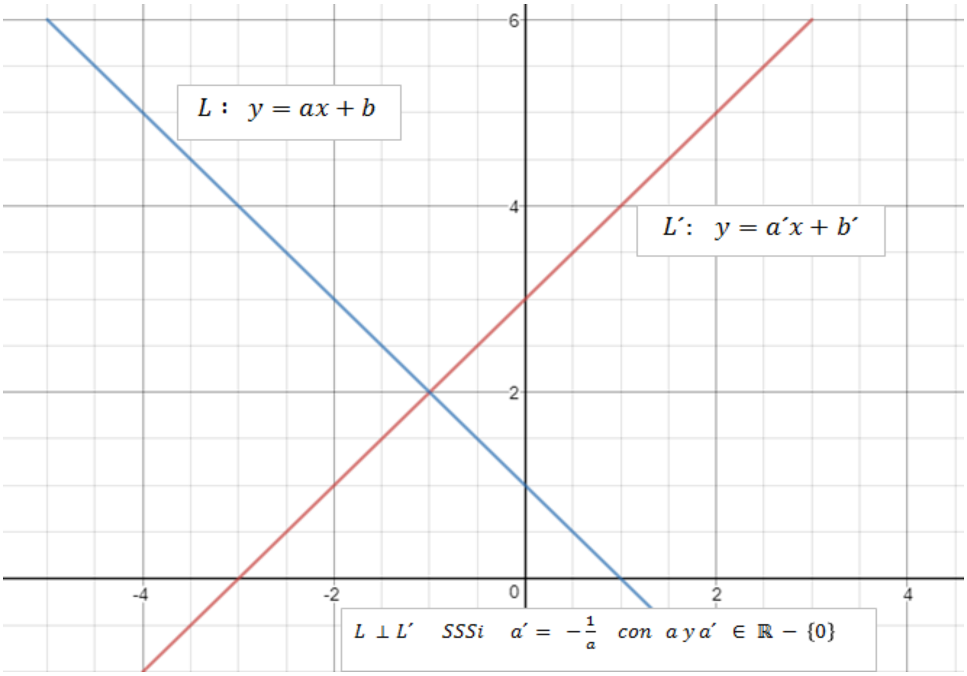


2.4 CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS

1) Dos rectas L y L' son paralelas (y escribiremos $L \parallel L'$) , si y solo si ($SSSi$) forman el mismo ángulo con el eje X, es decir dos rectas son ***paralelas*** si y solo si tienen la ***misma pendiente.***



2) Dos rectas L y L' , con pendientes no nulas, son perpendiculares (y escribiremos $L \perp L'$) si y solo si sus pendientes son opuestas e inversas.



CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 2.II

1) Dada la función lineal $f(x) = -4x + \frac{3}{2}$

a) Graficar

b) Indicar Dominio e Imagen de la función, pendiente y ordenada al origen

c) Hallar los puntos de intersección con los dos ejes coordenados

d) Dar una recta paralela a ella que pase por el punto $P = (-3, -1)$

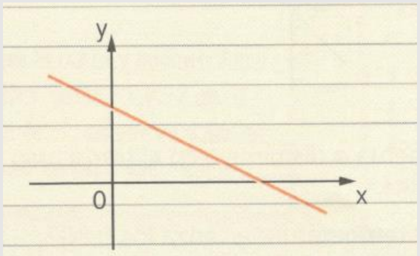
e) Dar una recta perpendicular a ella que pase por el punto $Q = (4, 1)$

2) Dar una recta L' que sea perpendicular a $L: y = -\frac{1}{2}x + 3$, y pase por su raíz.

3) Dadas las siguientes rectas, indicar cuáles son paralelas y cuales son perpendiculares. Justificar cada respuesta

$L_1: \ y = \frac{1}{2}x \qquad L_2: y = 3x - 1 \qquad L_3: y = -\frac{1}{3}x + 5 \qquad L_4: y = -2x + 2 \qquad L_5: \ y = -\frac{1}{3}x$

4) ¿A cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones podría corresponder el gráfico? ¿A cuáles no? Explica tus respuestas.



a. $y = 2x + 5$
b. $y = 2x - 5$
c. $y = -2x + 7$
d. $y = -5x + 10$
e. $y = -4x - 7$

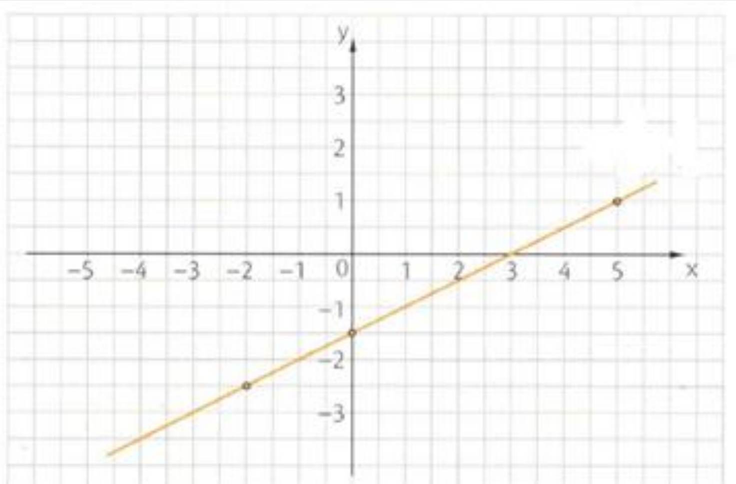
5) Para las rectas: $R_1: -2y = 5x - 3, \quad R_2: 2(x - 5) - 7y = 0 \ \ y \ \ R_3: y + \frac{1}{4}x - 3 = 0$

a) Graficar.

b) Indicar dominio, imagen, pendiente y ordenada al origen.

c) Hallar los puntos de intersección con los ejes coordenados.

6) Escribir la ecuación de la recta del dibujo:



7) En cada inciso, hallar la ecuación y graficar la recta que verifica los datos dados:

a) Pasa por los puntos (-8,3) y (9,-1).

b) La pendiente es -2 y pasa por el punto $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}},\mathbf{5}\right)$.

c) Es paralela a la recta con ecuación $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{y}-\mathbf{4}=\boldsymbol{x}+\mathbf{2}$, y pasa por el punto (-2,8).

d) Es perpendicular a la recta $\boldsymbol{y}=-\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{5}$ tiene ordenada al origen igual a 4.

e) Corta al eje x en 2 y al eje y en $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$.

f) Es paralela a la recta que pasa por $(-\mathbf{1},\mathbf{3})\ \boldsymbol{y}\ (\mathbf{4},-\mathbf{5})$ y corta al eje y en $\boldsymbol{y}=-\mathbf{5}$.

g) Es vertical y pasa por el punto (-3,6).

h) Es perpendicular a la recta $\boldsymbol{y}=\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{8}$ y pasa por (1,-3)

2.5 ANÁLISIS DE UNA FUNCIÓN LINEAL

Veremos ahora características que pueden analizarse en una función.

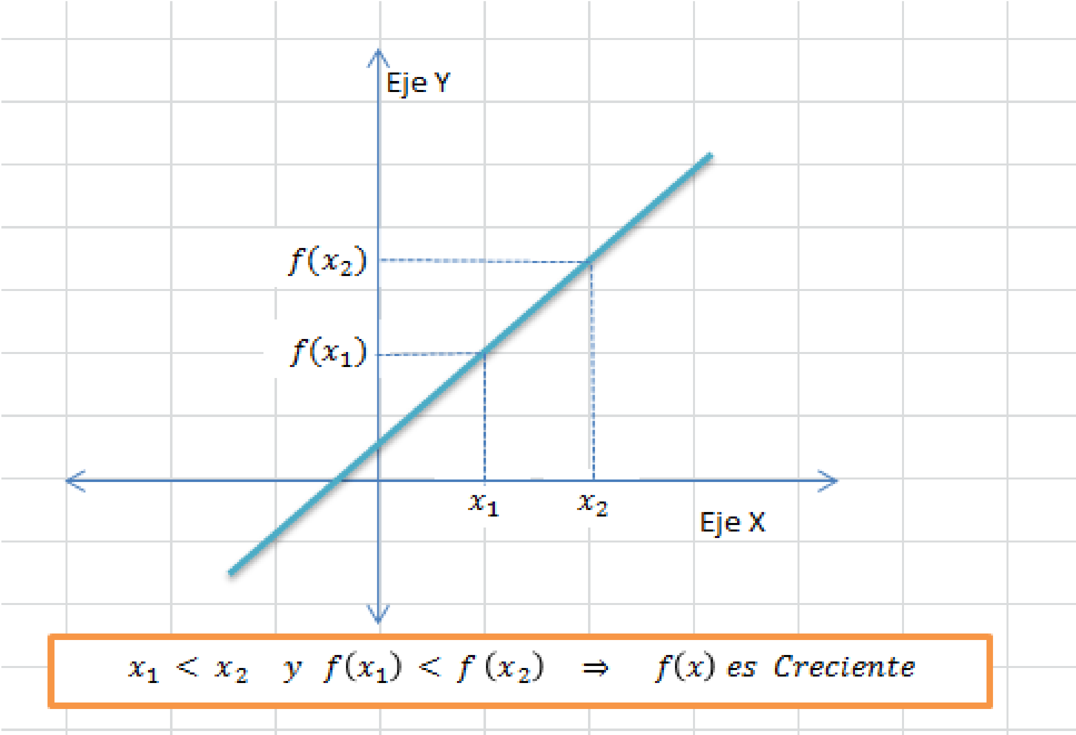
En principio, se trabajará para la función lineal pero luego podremos extender estas ideas a otras funciones.

Estas características son: Intervalos de Crecimiento o de Decrecimiento, Intervalos de positividad o de negatividad y paridad de funciones.

2.5.1 Intervalos de crecimiento o de decrecimiento en funciones

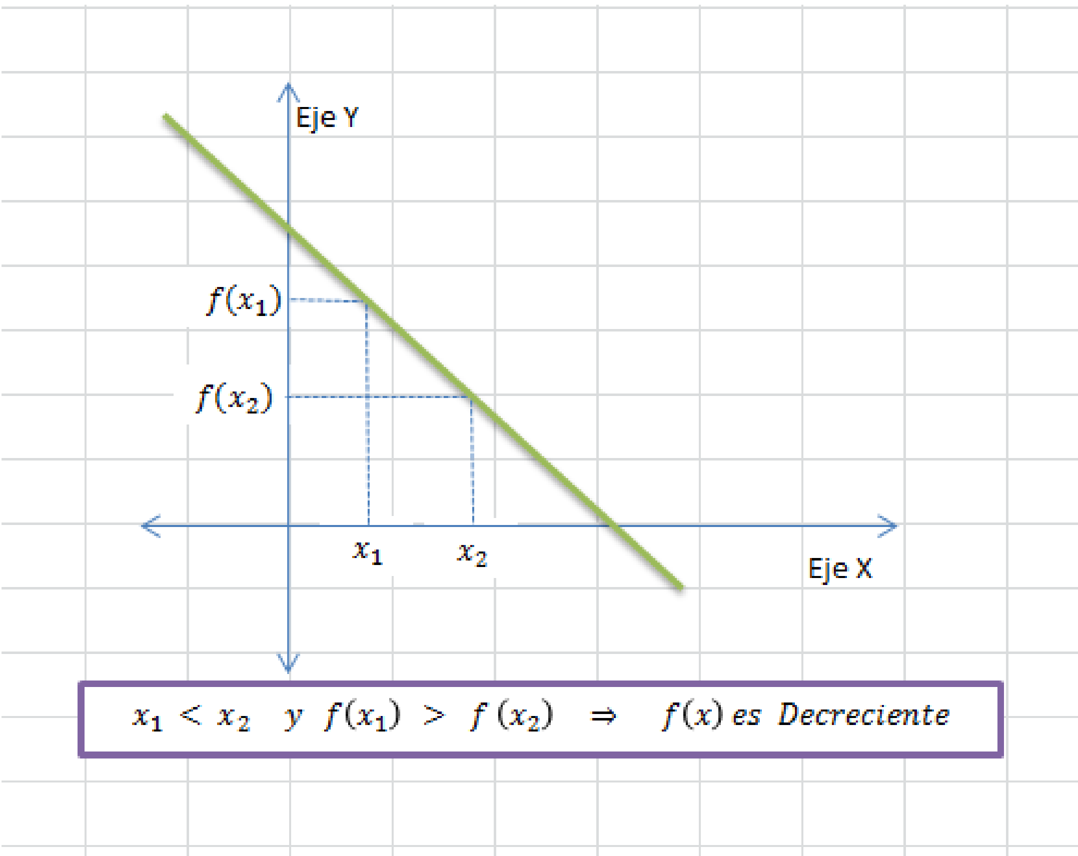
Dada una función continua $f(x)$ y un intervalo de números reales $(a\,,b)\ con\ a\,,b\ \in\ R$ tal que $(a\,,b)\ \subseteq Dom\ f$ diremos que $f(x)$ es ***creciente*** en ese intervalo, si se verifica lo siguiente:

$$Si\ \ x_1 < x_2\ \ \Rightarrow\ \ f(x_1)\ \ <\ \ f(x_2)\quad \forall\ x_1\,,x_2\quad \in\ \ (a\,,b)$$



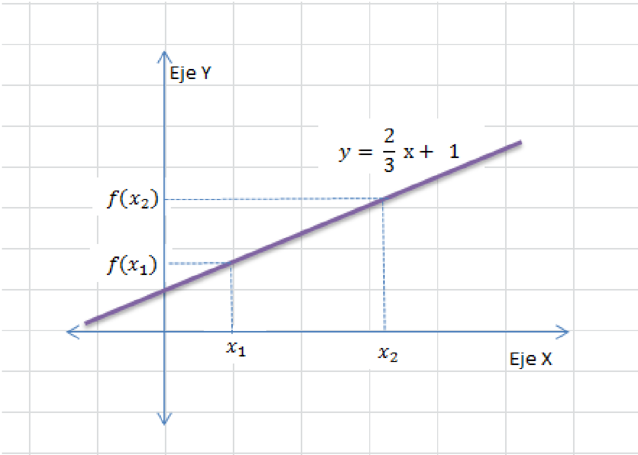
En forma análoga, dada una función continua $f(x)$ y un intervalo de números reales (a,b) con $a,b \in R$ tal que $(a,b) \subseteq Dom\,f$ diremos que $f(x)$ es ***decreciente*** en ese intervalo, si se verifica lo siguiente:

$$Si\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$$



EJEMPLO:

Dada la recta $L : y = \frac{2}{3}x + 1$ analizar si es creciente o decreciente.



Lo primero que hacemos es su gráfico.

Intuitiva y gráficamente observamos que su gráfico tiene tendencia creciente.

Si lo seguimos con la punta del dedo, nuestra mano “sube”.

Sin embargo, el análisis lo haremos algebraicamente de la siguiente forma:

El dominio de esta función, que es lineal, son todos los reales, es decir: $Dom\, f(x) = R$. Tomaremos, entonces, dos elementos de ese dominio y les haremos las operaciones algebraicas necesarias para llegar a obtener su imagen. Así podremos hacer la comparación.

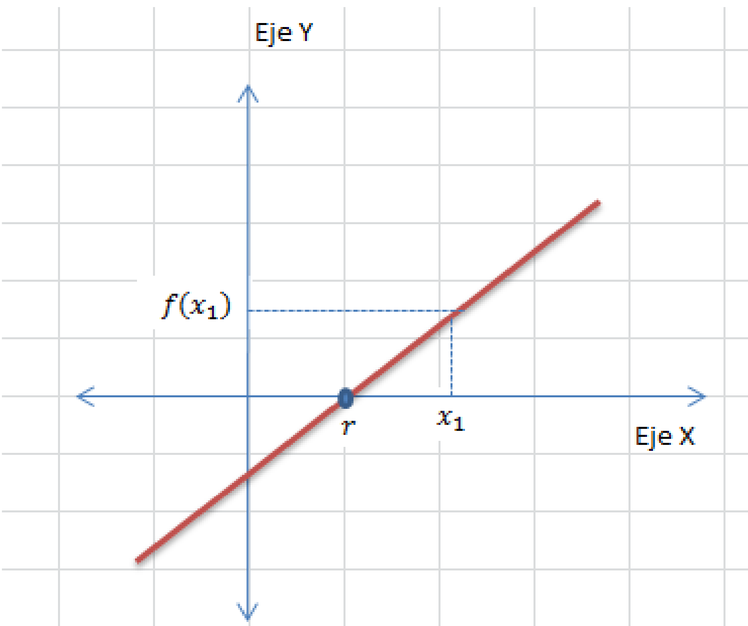
$$Sea\ \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \frac{2}{3}x_1 < \frac{2}{3}x_2 \ \Rightarrow \frac{2}{3}x_1 + 1 < \frac{2}{3}x_2 + 1 \ \Rightarrow \ f(x_1) < f(x_2)$$

Luego, $f(x)$ es CRECIENTE.

2.5.2 Intervalos de positividad o de negatividad

Dada una función continua $f(x)$ y un intervalo de números reales $(a\,,b)\ con\ a\,,b \in R$ tal que $(a\,,b) \subseteq Dom\, f$ diremos que $f(x)$ es ***positiva*** en ese intervalo, o que el intervalo $(a\,,b)$ es intervalo de positividad si se verifica lo siguiente:

$$\forall\, x \in (a\,,b) \ \ se\ verifica\ \ que\ \ f(x) > 0$$



En este gráfico se puede ver que el número es un número positivo y esto sucede con cualquier valor de la variable “x” que tomemos perteneciente al intervalo , siendo “r” la **raíz** de la función lineal planteada.

Es decir que el intervalo es intervalo de positividad de la función.

En forma análoga, dada una función continua $f(x)$ y un intervalo de números reales $(a\,,b)\ con\ a\,,b \in R$ tal que $(a\,,b) \subseteq Dom\, f$, diremos que $f(x)$ es ***negativa*** en ese intervalo, o que el intervalo $(a\,,b)$ es intervalo de negatividad, si se verifica lo siguiente:

$$\forall \ x \ \in \ (a\,,b) \quad se \ verifica \ que \ \ f(x) \ < \ 0$$

Si analizamos el gráfico del recuadro, de la función $f(x)$ podremos deducir que el intervalo $(-\infty\,,r)$ es un intervalo de negatividad, pues, para cualquier valor de la variable "x" que tomemos dentro de él el número que resulte como imagen será un número negativo

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 2.III

1) Dada la recta $\boldsymbol{L : y = -2x + \frac{3}{4}}$

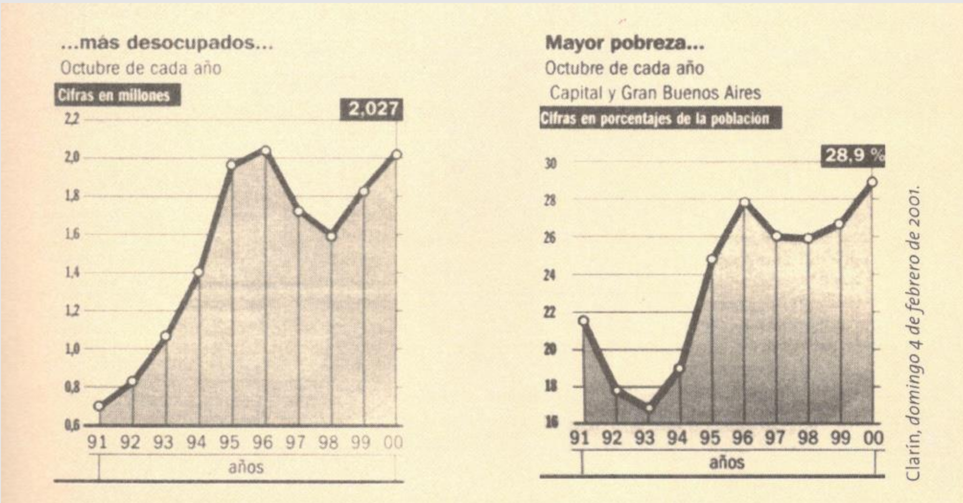
a) Graficarla

b) Analizar si es creciente o decreciente

c) Hallar su raíz

d) Indicar sus intervalos de positividad y negatividad

2) Para cada una de las siguientes funciones indiquen el dominio, la imagen y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.



3) Dada la función $\boldsymbol{f(x) = -3x^2 - 5}$

a) Completar la tabla de valores

b) Graficar en un par de ejes coordenados.

c) Analizar Dominio, Imagen, Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento, Intervalos de Positividad y Negatividad.

x	$y = -3x^2 - 5$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

2.5.3 Paridad e imparidad de funciones

Dada una función continua f, diremos que f es ***una función par***, si se cumple que la imagen de un número de su dominio es igual a la imagen del opuesto de ese número. Gráficamente, la función presenta una simetría con respecto al eje Y.

En lenguaje simbólico daremos la siguiente definición:

$$f\colon Dom\, f \to Im\, f \ \ es\, una\, función\, par, \qquad si \ \ se \ \ verifica \ \ que \ \ f(x) = f(-x) \ \ \forall\, x \ \in Dom\, f$$

EJEMPLO 5: Analizar si la función $f(x) = x^2 + 1$ es una función par

Calculamos, en forma genérica la imagen de un número cualquiera de su dominio, al que llamaremos x . Diremos, entonces que $f(x) = x^2 + 1$

Vemos, ahora, qué ocurre al querer calcular genéricamente la imagen del opuesto de este número seleccionado que sería $(-x)$. Tenemos que: $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$

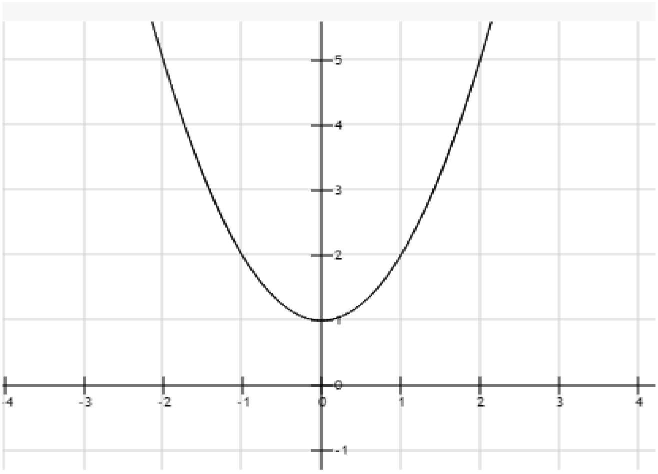
Concluimos que, como $f(x) = f(-x)$, entonces la función f es par.

Veamos, por tomar un ejemplo que:

$f(1) = 2$ y $f(-1) = 2$

Es decir, para cualquier valor que analicemos la imagen de él será la misma que la imagen de su opuesto.

Notemos, también, que la gráfica de la función presenta una simetría con respecto al eje Y.



Dada una función continua f, diremos que f es ***una función impar***, si se cumple que la imagen del opuesto de un número de su dominio es igual al opuesto de la imagen de ese número. Gráficamente, la función presenta una simetría con respecto al origen de coordenadas.

En lenguaje simbólico daremos la siguiente definición:

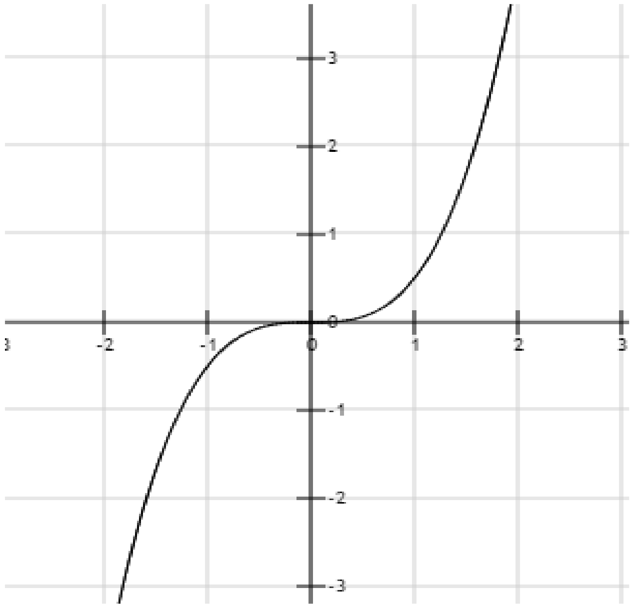
$$f: Dom\ f \rightarrow Im\ f\ es\ una\ función\ impar, \quad si\ \ se\ \ verifica\ \ que\ \ f(-x) = -f(x)\ \ \forall\, x \in Dom\ f$$

EJEMPLO 6: Analizar si la función $g(x) = \frac{1}{2}x^3$ es una función impar.

Calculamos, en forma genérica la imagen de un número cualquiera de su dominio, al que llamaremos x . Diremos, entonces que $g(x) = \frac{1}{2}x^3 \Rightarrow -g(x) = -\frac{1}{2}x^3$

Vemos, ahora, qué ocurre al querer calcular genéricamente la imagen del opuesto de este número seleccionado que sería $(-x)$. Tenemos que: $g(-x) = \frac{1}{2}(-x)^3 = -\frac{1}{2}x^3$

Concluimos que, como $g(-x) = -g(x)$, entonces la función f es impar.



Veamos, por tomar un ejemplo que:

$g(2) = 4 \Rightarrow -g(2) = -4$

y $g(-2) = -4$

Es decir, para cualquier valor que analicemos la imagen del número opuesto, será, el opuesto de la imagen del número.

Notemos, también, que la gráfica de la función presenta una simetría con respecto al origen de coordenadas.

***Observación importante*:** Hay funciones que no resultan ser ni pares ni impares.

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 2.IV

1) Analizar la paridad de la función $\boldsymbol{h(x) = -\frac{2}{3}x + 2}$

2) Indicar Verdadero o Falso según corresponda, justificando la respuesta:

- **(a)** La función $\boldsymbol{f_1(x) = -x^2 + 3}$ es IMPAR
- **(b)** La función $\boldsymbol{f_2(x) = -3x + \frac{1}{4}}$ es PAR
- **(c)** La función $\boldsymbol{f_3(x) = x^3}$ es IMPAR

3) Analizar, utilizando la definición de funciones pares o impares, si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas.

- **(a)** $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 3}$
- **(b)** $\boldsymbol{g(x) = x - 1}$
- **(c)** $\boldsymbol{h(x) = \frac{1}{x^5}}$
- **(d)** $\boldsymbol{n(x) = 2x + 1}$
- **(e)** $\boldsymbol{l(x) = x^2 + 2x - 3}$
- **(f)** $\boldsymbol{m(x) = -2x^2}$

4) Sabiendo que $\boldsymbol{f}$ es una función impar y $\boldsymbol{f(-12) = 3}$, resolver la siguiente inecuación:

$$\boldsymbol{f(12).x^2 - 4 < 5}$$

3 ESTUDIO PARTICULAR DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática es una función polinómica, definida de reales en reales, de la siguiente forma:

$$f : R \to R \ \ tal\ que\ f(x) = ax^2 + bx + c \qquad con\ \ a, b, c \in R \quad y \quad a \neq 0$$

El dominio de una función cuadrática es R pero la imagen no abarca a todos los reales.

Ya estudiaremos que según sea la orientación de la parábola surge el conjunto imagen.

La gráfica de una función cuadrática es una **PARÁBOLA** y toda parábola tiene un **VÉRTICE** (punto donde la parábola alcanza su máximo o su mínimo) y un **EJE DE SIMETRÍA** que es una recta que pasa por el vértice y es paralelo a alguno de los ejes cartesianos y que marca gráficamente una partición del dibujo en dos partes simétricas.

Si fueran los números $a, b, c \in R$ todos distintos de cero simultáneamente, la ecuación cuadrática se llama COMPLETA, mientras que si fuera $b = 0$ o $c = 0$, la ecuación cuadrática será INCOMPLETA.

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas completas:

$$g(x) = x^2 - 4x + 3 \qquad o \qquad m(x) = -x^2 - 6x - 11$$

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas incompletas:

$$w(x) = x^2 - 3x \qquad o \qquad z(x) = x^2 - 4$$

3.1 DEFINICIÓN DE RAÍZ DE UNA FUNCIÓN

DIREMOS QUE $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{R}$ ES *RAÍZ* DE LA FUNCIÓN SI $\boldsymbol{f(x_0) = 0}$

ESTO SIGNIFICA QUE $\boldsymbol{x_0}$ ES UN NÚMERO REAL QUE HACE QUE LA FUNCIÓN SE ANULE, ES UN NÚMERO REAL CUYA IMAGEN ES CERO.

Calculemos las raíces de las funciones $w(x)$ y $z(x)$

Por lo tanto, la o las raíces de la función $w(x)$ serán los valores que hagan cero a la ecuación.

Volviendo a las funciones cuadráticas anteriores realizaremos dos ejemplos

EJEMPLO 1:

Como la función es $\quad w(x) = x^2 - 3x$

Escribimos entonces $\quad w(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x \,.\, (x - 3) = 0$

$$\Rightarrow x = 0 \quad o \quad x = 3$$ serán las raíces de $w(x)$

Por lo tanto la función corta al eje X en los puntos $R_1 = (0, 0)$; $R_2 = (3, 0)$

EJEMPLO 2: Para la función $\quad z(x) = x^2 - 4$

Escribimos, entonces: $\quad z(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$

$$\Longrightarrow x = 2 \quad o \quad x = (-2)$$ Serán las raíces de $z(x)$

Concluimos que la función corta al eje X en los puntos $P_1 = (2, 0)$; $P_2 = (-2, 0)$

Las ecuaciones cuadráticas incompletas permiten calcular sus raíces solo con aplicar propiedades de los números reales, pero, si las ecuaciones cuadráticas son completas el despeje no resulta tan sencillo.

Por este motivo, en una ecuación cuadrática completa, calcularemos sus raíces utilizando la llamada ***FÓRMULA POLINÓMICA O GENERAL.***

Dada una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, sus raíces x_1 y x_2 serán calculadas con la fórmula que enuncia:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

EJEMPLO 3: Calcular las raíces de $g(x) = x^2 - 4x + 3$

En este caso tenemos:

$a = 1$, $b = (-4)$, $c = 3$

Reemplazamos en la fórmula general y nos queda:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

De donde podemos deducir que $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$ son las raíces y entonces, la parábola corta al eje X en los puntos $Q_1 = (3\,,0)$ y $Q_2 = (1\,,0)$

EJEMPLO 4: Buscar las raíces de $m(x) = -x^2 - 6x - 11$

En este caso: $a = (-1)$, $b = (-6)$, $c = (-11)$

Reemplazamos en la fórmula general y nos queda:

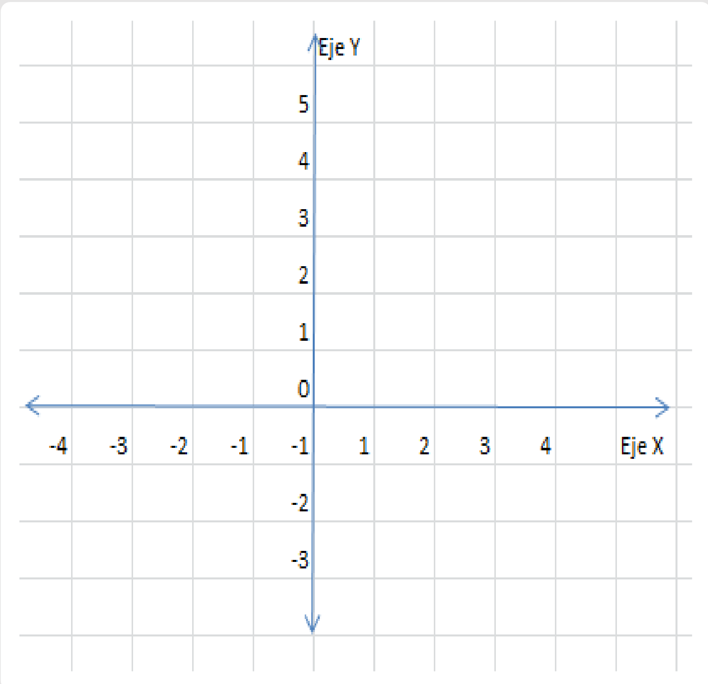
$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.(-1).(-11)}}{2.(-1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36-44}}{-2} = \frac{6 \pm \sqrt{-8}}{-2}$$

De donde podemos decir que la función no tiene raíces reales, por lo que no corta al eje X.

Aclaramos que no tiene raíces reales porque sus raíces son números complejos y conjugados que no trabajaremos en este curso.

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 3.I

Graficar la función, $\boldsymbol{f: R \to R^+ \;\, tal\; que\;\, f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3}$ y completar el cuadro de abajo.



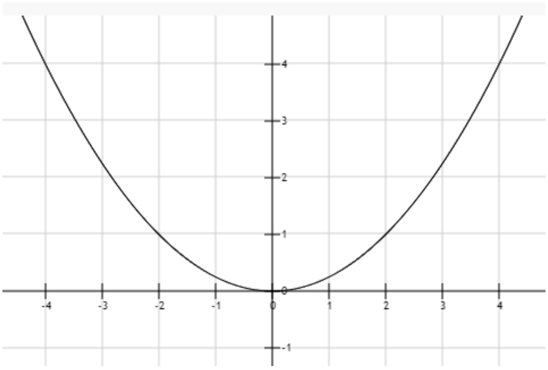
DOMINIO de $\boldsymbol{f(x)}$	
IMAGEN de $\boldsymbol{f(x)}$	
VÉRTICE de la parábola	
EJE DE SIMETRÍA	
RAÍCES de la función	
La función CRECE EN	
La función DECRECE EN	
INTERVALO/S de POSITIVIDAD	
INTERVALO/S de NEGATIVIDAD	
¿La función es PAR, IMPAR o NINGUNA DE ESTAS?	
¿La ecuación presentada es COMPLETA o INCOMPLETA?	

3.2 CONCAVIDAD DE UNA PARÁBOLA

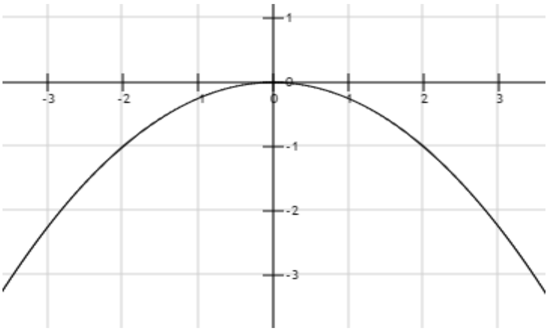
Hemos dicho que las funciones cuadráticas representan una parábola.

Estas pueden ser:

Cóncavas hacia arriba, si $\boldsymbol{a > 0}$



Cóncavas hacia abajo, si $\boldsymbol{a < 0}$



Además, el valor numérico de a nos indicará si la gráfica se acerca o se aleja al eje Y.

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 3.II

Grafiquemos las siguientes funciones cuadráticas en el mismo sistema de ejes cartesianos y saquemos las conclusiones pertinentes:

$$\boldsymbol{f_1(x) = x^2} \;;\; \boldsymbol{f_2(x) = 2x^2} \;;\; \boldsymbol{f_3(x) = -2x^2} \;;\; \boldsymbol{f_4(x) = \frac{1}{3}x^2} \;;\; \boldsymbol{f_5(x) = -\frac{1}{3}x^2}$$

Primero completamos cada una de las tablas:

x	$f_1(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

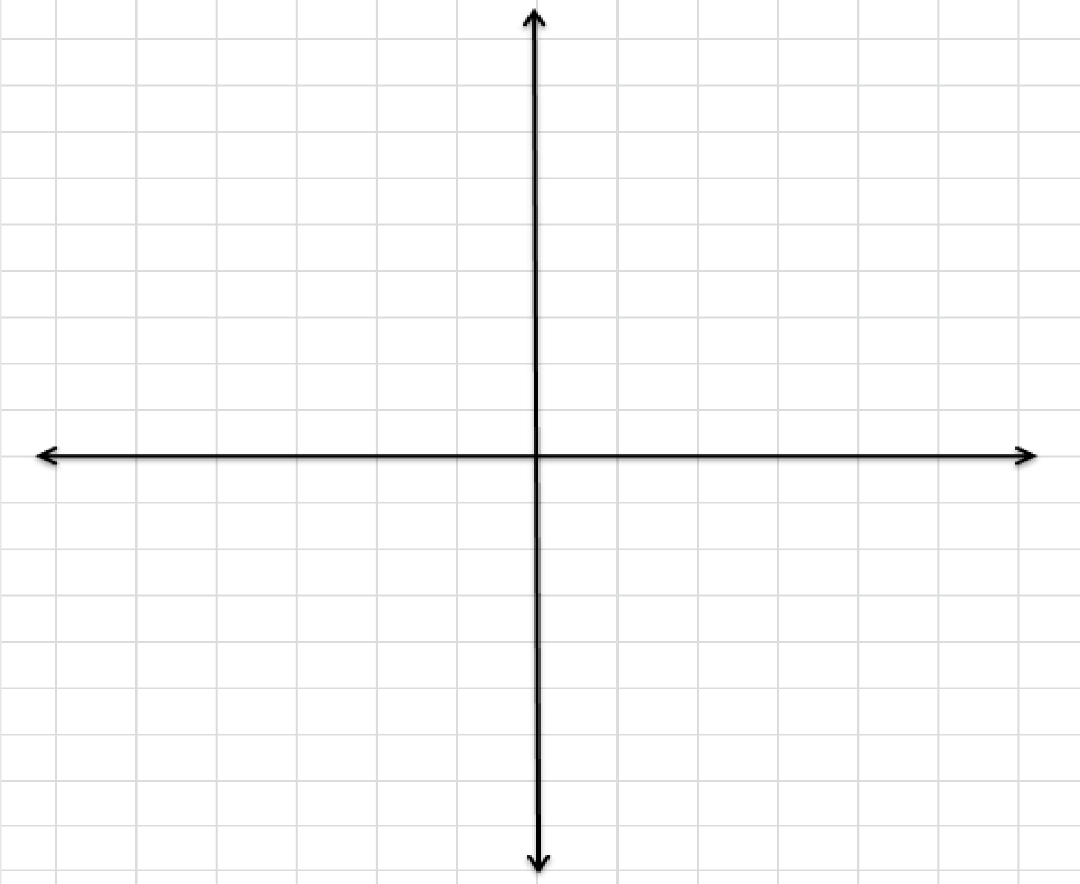
x	$f_2(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	$f_3(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	$f_4(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	$f_5(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Una vez completada cada tabla, graficar en el mismo sistema de ejes cartesianos las cinco funciones:



Ahora las conclusiones:

Si $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$, la parábola ………………………………………………………………………………

Si $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$, la parábola ………………………………………………………………………………

Si $\boldsymbol{a} < (-\mathbf{1})$, la parábola ………………………………………………………………………………

Si $-\mathbf{1} < \boldsymbol{a} < \mathbf{0}$, la parábola ………………………………………………………………………

3.3 VÉRTICE DE UNA PARÁBOLA

Hemos dicho ya, que la parábola tiene un ***vértice*** que será su máximo o mínimo.

Las coordenadas del vértice son h y k , es decir el vértice de una parábola es de la forma:

$$\boxed{\boldsymbol{V = (h\,, k)}}$$

Si recordamos la expresión de una función cuadrática como: $f(x) = ax^2 + bx + c$, las coordenadas del vértice se calculan con las siguientes fórmulas:

$$\boxed{\boldsymbol{h = -\frac{b}{2a}} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{k = f(h)}}$$

EJEMPLO 5: Volvamos a las función $g(x) = x^2 - 4x + 3$ y calculemos el vértice.

Ya sabíamos que: $a = 1$, $b = (-4)$, $c = 3$

Y que las raíces o puntos de corte con eje X son: $Q_1 = (3\,, 0)$ y $Q_2 = (1\,, 0)$

Vamos ahora, a buscar las coordenadas del vértice de la parábola, usando las formulas correspondientes:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ , es decir } h = 2$$

Una vez encontrado el valor de h, lo reemplazamos en la función para encontrar el valor de k:

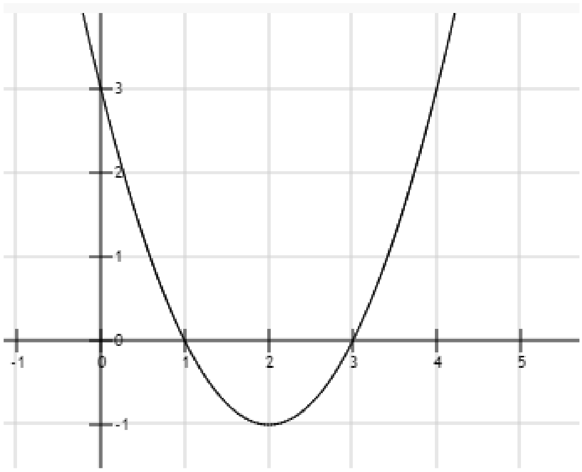
$$k = g(h) = g(2) = 2^2 - 4.2 + 3 = 4 - 8 + 3 = (-1)$$

Por lo cual $k = (-1)$

Esto nos lleva a concluir que el vértice buscado es $V = (2, -1)$

Por otro lado, teníamos $a = 1$, o sea $a > 0$, entonces nuestra parábola será cóncava hacia arriba.

Con todos estos datos (vértice, concavidad y puntos de corte con eje X, podemos graficarla de la siguiente forma:



EJEMPLO 6: Encontrar la gráfica de la función $m(x) = -x^2 - 6x - 11$ utilizando su vértice, orientación y raíces.

En este caso ya sabíamos que: $a = (-1)$, $b = (-6)$, $c = (-11)$

Y no habíamos encontrado raíces reales, es decir no tenía cortes con el eje X.

Vamos a buscar las coordenadas del vértice de la parábola usando la formula correspondiente.

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2.(-1)} = -\frac{-6}{-2} = -3 \text{ , es decir } h = (-3)$$

Una vez encontrado el valor de h, lo reemplazamos en la función para encontrar el valor de k

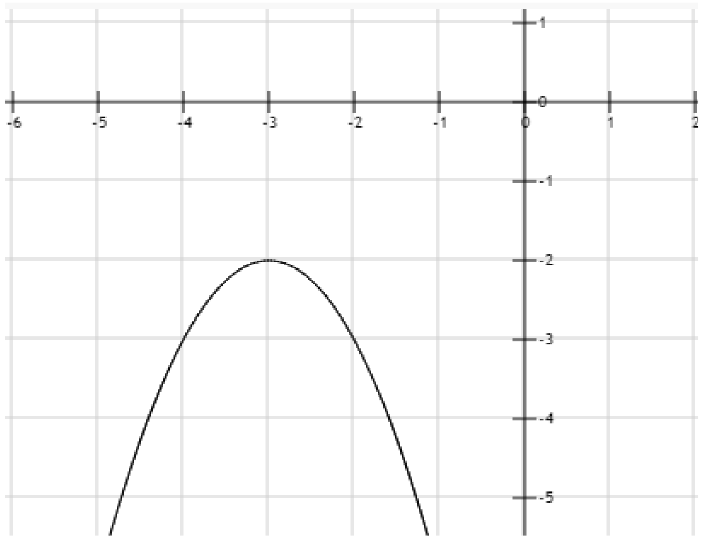
$$k = m(h) = m(-3) = -(-3)^2 - 6.(-3) - 11 = -9 + 18 - 11 = (-2)$$

Por lo cual $k = (-2)$

Esto nos lleva a concluir que el vértice buscado es $V = (-3, -2)$

Por otro lado, teníamos $a = (-1)$, o sea $a < 0$, entonces nuestra parábola será cóncava hacia abajo.

Con todos estos datos (vértice, concavidad y puntos de corte con eje X, podemos graficarla de la siguiente forma:



Al graficarla observamos claramente, por qué no obtuvimos raíces reales cuando quisimos calcularlas con la fórmula general. Su vértice y su orientación nos muestran que no cortará nunca al eje de las abscisas.

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 3.III

1. Hallar vértice y raíces de la función cuadrática $\boldsymbol{v(x) = x^2 + x - \frac{11}{4}}$. Indicar su orientación y graficar.
2. Hallar vértice y raíces de la función cuadrática $\boldsymbol{t(x) = -2x^2 + 12x - 14}$. Indicar su orientación y graficar
3. Completar el siguiente cuadro:

Función	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	Raíces	Vértice	Eje de Simetría	Ordenada al origen
$\boldsymbol{y = -x^2 + 2}$							
$\boldsymbol{y = 2x^2 + 4x - 1}$							
$\boldsymbol{y = x^2 - 4x - 5}$							

4. Graficar las siguientes parábolas y determinar las coordenadas del vértice y las intersecciones con los ejes. Analizar conjuntos de Positividad y Negatividad. Estudiar, en cada inciso, si la función es par o no.

a) $\boldsymbol{y = 2x^2 - 4x - \frac{5}{2}}$ b) $\boldsymbol{x^2 - x - 2}$ c) $\boldsymbol{-\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - 5}$

3.4 FORMAS POLINÓMICA, CANÓNICA Y FACTORIZADA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA.

Hasta ahora, hemos trabajado con la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, la que recibe el nombre de ***FORMA POLINÓMICA*** de la función.

Pero, cuando se tiene el vértice $V = (h\,, k)$ se la puede escribir como $f(x) = a\,(x - h)^2 + k$ expresión a la que vamos a llamar ***FORMA CANÓNICA*** de la función.

Además, si se cuenta con el coeficiente del término cuadrático (a) y las raíces de la función cuadrática podemos expresarla de la siguiente forma: $f(x) = a\,(x - r_1).(x - r_2)$, expresión a la que vamos a llamar ***FORMA FACTORIZADA*** de la función

EJEMPLO 7: Al comienzo de este tema dimos cuatro funciones cuadráticas en su forma polinómica. Queremos llevarlas, ahora, a su forma canónica.

Comenzamos con la primera: $g(x) = x^2 - 4x + 3$

Sea $g(x) = x^2 - 4x + 3$, habíamos calculado más arriba, su vértice que resultó ser: $V = (2\,,-1)$

También teníamos que era $a = 1$

Luego, la forma canónica de esta expresión cuadrática es $g(x) = (x-2)^2 - 1$

También habíamos calculado sus raíces que eran: $Q_1 = (3\,,0)$ y $Q_2 = (1\,,0)$, es decir que tiene raíces en $r_1 = 3$ y $r_2 = 1$

Luego, la forma factorizada de esta expresión cuadrática es $g(x) = (x-3).(x-1)$

Si quisiéramos expresar en forma canónica y en forma factorizada, las otras funciones cuadráticas que dimos al comienzo de este desarrollo:

$$m(x) = -x^2 - 6x - 11 \quad ; \quad w(x) = x^2 - 3x \quad ; \quad k(x) = x^2 - 4$$

Debemos notar que cada una de las formas de expresar una parábola nos brinda distinta información.

Esto es: la forma polinómica nos permite rápidamente acceder a la fórmula general para encontrar sus raíces, la forma canónica nos permite hallar vértice y orientación con solo leer la ecuación y la forma factorizada nos brinda a simple vista las raíces de la función cuadrática.

Todo esto significa que tendremos que aprender a pasar de una forma de expresar a la función cuadrática a la otra, según sea lo que necesitamos encontrar.

3.5 Pasaje de forma canónica a forma polinómica

Explicaremos el procedimiento a través de un ejemplo.

EJEMPLO 8: Dada la función cuadrática: $f(x) = \frac{1}{2}\,(x+1)^2 - 3$, hallar sus raíces.

Para aplicar la fórmula general, necesitamos conocer la función en su forma polinómica, es decir nos proponemos pasar de forma canónica a forma polinómica.

Este pasaje es sencillo ya que solo necesitamos desarrollar la expresión como se muestra:

$$\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3 = \frac{1}{2}\,(x^2 + 2x + 1) - 3 = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2}$$

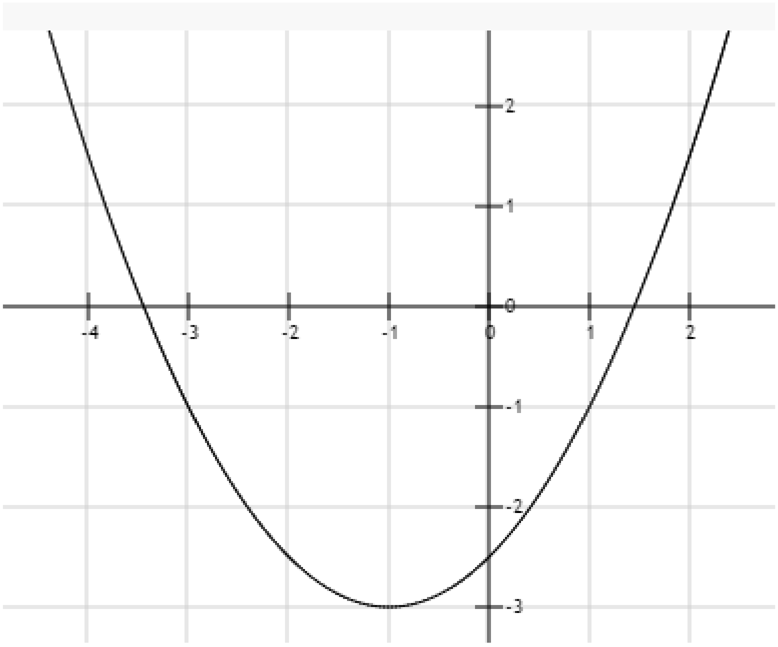
Entonces, la expresión $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$ es equivalente a la expresión

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2}$ solo que en el primer caso está dada en forma canónica y en el segundo caso está dada en forma polinómica.

La ventaja es que en esta segunda forma de expresarla tenemos: $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$; $c = -\frac{5}{2}$ y con estos valores reemplazamos en la ecuación general ya vista y utilizada

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.\frac{1}{2}.\left(-\frac{5}{2}\right)}}{2.\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{1} = -1 \pm \sqrt{6}$$

De donde podemos enunciar que $x_1 = -1 + \sqrt{6}$ y $x_2 = -1 - \sqrt{6}$ son las raíces



3.6 Pasaje de forma polinómica a forma canónica

Si tenemos la función cuadrática dada en su forma polinómica pero nos piden identificar el vértice y su eje de simetría tenemos que llevarla a su forma canónica. Este pasaje no es tan sencillo como el que vimos recién y se realiza mediante lo que conocemos como **COMPLETAMIENTO DE CUADRADOS.**

En primer lugar tenemos que recordar que para desarrollar el cuadrado de un binomio contamos con la fórmula que dice: $(x + r)^2 = x^2 + 2xr + r^2$

El segundo miembro de esa fórmula es conocido como ***Trinomio Cuadrado Perfecto.***

EJEMPLO 9: Dada la función $h(x) = x^2 - 10x + 28$ en forma polinómica, calcular su vértice.

Ponemos nuestra atención en los dos primeros términos y tratamos de calcular el término que falta para que el trinomio sea cuadrado perfecto

$$x^2 - 10x + \cdots ...$$

Pero tenemos que $-10x = 2xr$ $\Rightarrow$ $r = \frac{-10x}{2x}$ $\Rightarrow r = (-5)$, luego $r^2 = 25$

Es decir que el término que falta es un 25.

Trabajamos con la expresión de la siguiente forma:

$$x^2 - 10x + 28 = x^2 - 10x + 25 + 3 = (x^2 - 10x + 25) + 3 = (x - 5)^2 + 3$$

Logramos así que la expresión que estaba dada en su forma polinómica

$h(x) = x^2 - 10x + 28$

pase a estar dada en su forma canónica $g(x) = (x - 5)^2 + 3$ donde se puede leer fácilmente cuál es su vértice.

En este ejemplo se cumplía que $a = 1$, veremos cómo proceder cuando esto no sea así.

EJEMPLO 10:

Sea $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$ expresar en su forma canónica.

Lo primero que tenemos que hacer es sacar factor común el valor que acompaña al término cuadrático

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 5)$$

$$= \frac{1}{2}[(x^2 - 6x) + 5]$$

$$= \frac{1}{2}[(x^2 - 6x + 9) - 9 + 5]$$

$$= \frac{1}{2}[(x - 3)^2 - 4]$$

$$= \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$$

De esta forma, la expresión que teníamos en forma polinómica está ahora, en forma canónica

CONSOLIDACION DE CONCEPTOS 3.IV

1) Dar vértice, raíces y eje de simetría de la función cuadrática $\boldsymbol{s(x) = (-2)(x + 4).(x - 1)}$, y luego graficar.

2) Dar vértice, raíces y eje de simetría de la función cuadrática $\boldsymbol{m(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1}$. Graficar.

3) Dar vértice, raíces y eje de simetría de la función cuadrática $\boldsymbol{t(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 3}$. Graficar

4) Expresar cada una de las siguientes funciones en la forma en que se pide:

a) $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 3}$ en forma canónica.

b) $\boldsymbol{g(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x - 3)}$ en forma polinómica.

c) $\boldsymbol{h(x) = 2(x - 3)^2 - 2}$ en forma factorizada.

5) Escribir la ecuación de <u>todas</u> las funciones cuadráticas que cumplen las siguientes condiciones:

a) Tiene vértice en $(\boldsymbol{-3, -2})$ y pasa por el punto (0,1).

b) Tiene vértice (0,-5) y no corta al eje x.

c) Tiene una única raíz en x=3 y corta al eje y en y=5.

d) Corta al eje x en x=-5 y en x=3 y su imagen es el intervalo $(-\infty, \boldsymbol{4}]$

e) Las raíces son $\boldsymbol{x_1 = -4}$ y $\boldsymbol{x_2 = 2}$ y el coeficiente principal es -1.

6) Graficar las siguientes parábolas y determinar las coordenadas del vértice, las intersecciones con los ejes y el eje de simetría.

a) $\boldsymbol{f(x) = 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$ b) $\boldsymbol{2.(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)}$

3.7 Ejercitación Extra de Función Cuadrática:

1) Trace la gráfica de cada función e indique todos los puntos de intersección x y y en cada gráfica

a) $p(x) = x^2 - 4$

b) $q(x) = (x - 4)^2$

c) $r(x) = 2x^2 - 2$

d) $s(x) = 2(x - 2)^2$

2) Dadas las siguientes funciones cuadráticas, realizar los pasajes necesarios para hallar las gráficas de las mismas.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$

b) $g(x) = 1 + 8x - x^2$

c) $h(x) = -2x^2 + 12x + 12$

d) $i(x) = 6x - 3x^2$

e) $j(x) = x^2 - x - 6$

3) Encontrar el valor máximo o mínimo de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$

b) $g(x) = 1 - x - x^2$

c) $h(x) = 2x^2 + 4x + 3$

4) Una piedra es lanzada hacia arriba desde lo alto de un edificio. Su altura (en pies) arriba del suelo después de t segundos está dada por la función:

$$h(t) = -16t^2 + 48t + 32$$

¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?

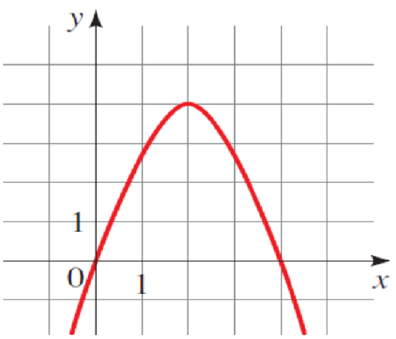
5) La utilidad p (en dólares) generada por vender x unidades de cierta mercancía está dada por la función:

$$p(x) = -1500 + 12x - 0.004x^2$$

¿Cuál es la utilidad máxima y cuántas unidades deben ser vendidas para generarla?

6) Dada la siguiente grafica encontrar:

a. La o las raíces
b. El vértice
c. El intervalo de crecimiento y decrecimiento
d. Máximos o mínimos
e. La ecuación de dicha función



7) Una bala de cañón disparada al mar desde una batería en la costa sigue una trayectoria parabólica dada por la gráfica de la ecuación:

$$h(x) = 10x - 0.01x^2$$

donde $h(x)$ es la altura de la bala de cañón sobre el agua cuando ha recorrido una distancia horizontal de x pies.

(a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bala de cañón?

(b) ¿Qué distancia recorre horizontalmente la bala de cañón antes de caer al agua?

4 Estudio particular de la función cúbica

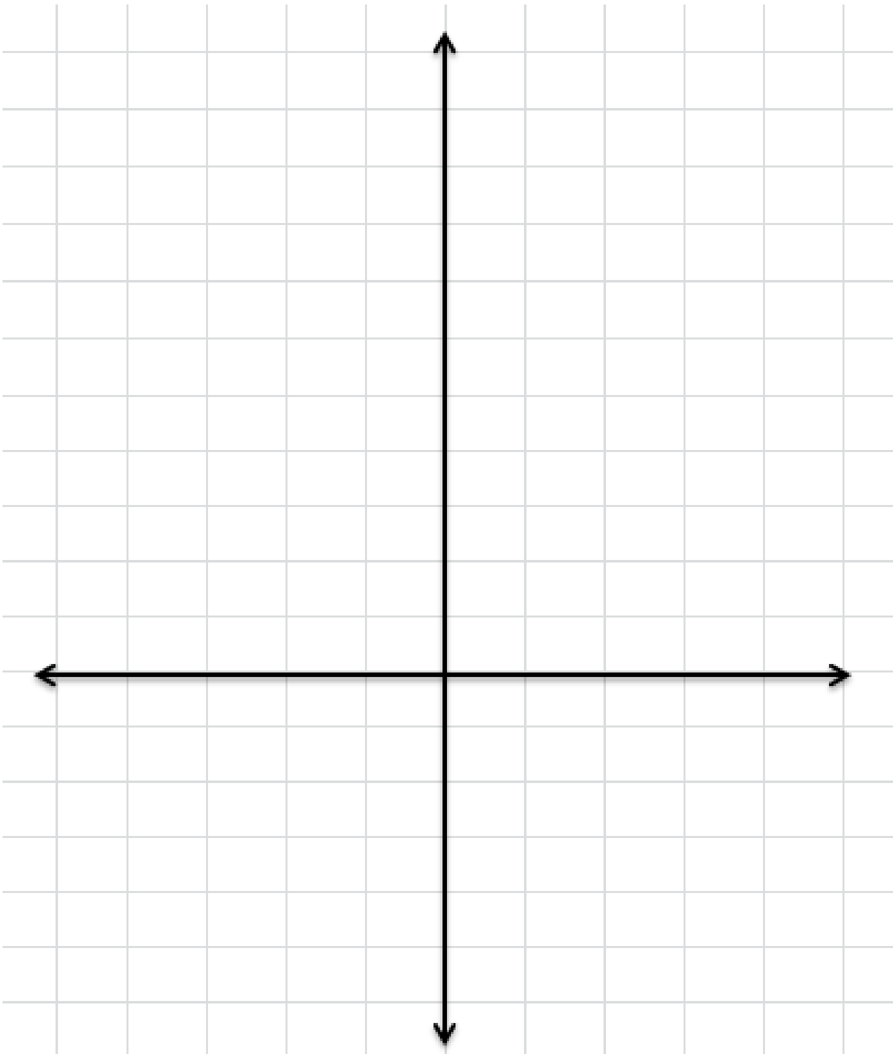
En este curso estudiaremos las funciones polinómicas de grado tres en su forma canónica, por lo tanto, diremos que una función cúbica es una expresión de la forma:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = a\,(x-h)^3 + k}}$$

EJEMPLO 1: Sea la función: $g(x) = (x-1)^3 + 2$

PARA INTENTAR GRAFICARLA, COMPLETAMOS LA TABLA:

x	$g(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	



Vemos que el punto $P = (1\,,2)$ es el punto donde la función cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba. Es decir que es el punto donde se dá un ***CAMBIO DE CONCAVIDAD***

Analizaremos, ahora, los efectos que produce, en la forma del gráfico, el valor de a . Para eso graficaremos las siguientes funciones cúbicas y sacaremos nuestras propias conclusiones

$$f_1(x) = x^3 \;;\; f_2(x) = 2x^3 \;;\; f_3(x) = -2x^3 \;;\; f_4(x) = \frac{1}{2}x^3 \;;\; f_5(x) = -\frac{1}{2}x^3$$

x	$f_1(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

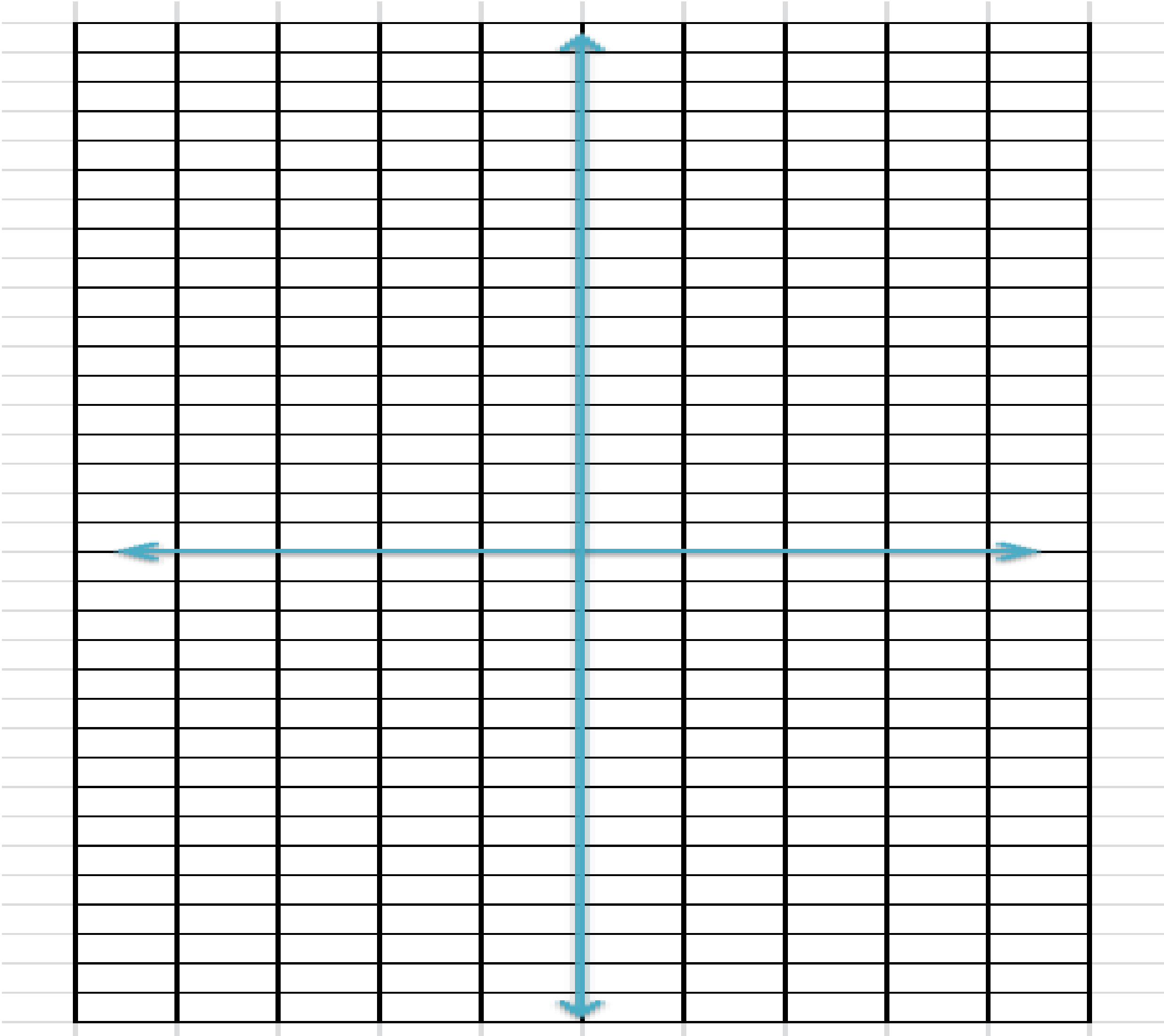
x	$f_2(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	$f_3(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	$f_4(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	$f_5(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

Una vez completada cada tabla, graficar en el siguiente sistema de ejes cartesianos las cinco funciones (sugerencia: graficar cada una de ellas en distinto color de tinta para distinguirlas mejor):



Ahora las conclusiones:

Si $a > 1$, la gráfica de la función……………………………………………………………………

Si $0 < a < 1$, la gráfica de la función………………………………………………………………

Si $a < (-1)$, la gráfica de la función…………………………………………….…………………

Si $-1 < a < 0$, la gráfica de la función……………………………………………………………

4.1. EJERCITACIÓN DE FUNCIONES CÚBICAS

1) Completar las frases según corresponda:

a. El dominio de una función cúbica es ……………………………………………………………………

b. La imagen de una función cúbica es ……………………………………………………………………

c. ¿Cómo es el crecimiento en una función cúbica? Explicar

……

……

d. ¿Tiene, una función cúbica, intervalos de positividad y negatividad? Explica.

……

……

2) Graficar las siguientes funciones. Indicar dominio e imagen. Determinar las intersecciones con los ejes (realizar los cálculos correspondientes). Indicar si la función es impar o no, justificando la respuesta. Indicar los intervalos de positividad y negatividad.

a) $y = -x^3 + 2$ b) $y = 4.(x-1)^3 - 3$ c) $y = -(x-3)^3 - 1$

3) Trace la gráfica de cada función e indique todos los puntos de intersección x y y en cada gráfica:

a) $P(x) = x^3 - 8$

b) $R(x) = -x^3 + 27$

c) $S(x) = -(x+2)^3$

d) $Q(x) = \frac{1}{2}(x-1)^3 + 4$

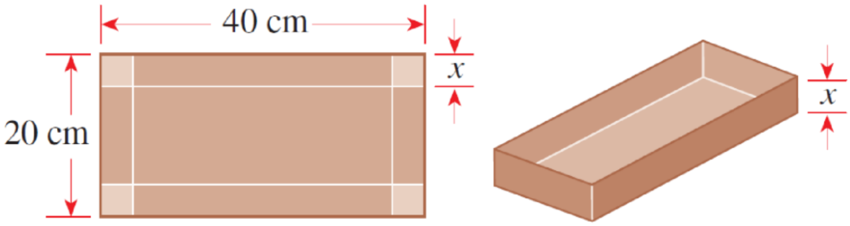
e) $T(x) = -(x+2)^3 + 27$

4) Se ha de construir una caja con una pieza de cartón de 20 cm por 40 cm, cortando cuadrados de longitud x de lado de cada esquina y doblando los lados hacia arriba, como se ve en la figura.

a) Exprese el volumen V de la caja como función de x.

b) ¿Cuál es el dominio de V? (Use el dato de que la longitud y el volumen deben ser positivos.)

c) Trace una gráfica de la función V, y úsela para estimar el volumen máximo para esa caja.



5 FUNCIONES DADAS POR PARTES

Una función f está definida por partes, si la **ley** que define la dependencia entre sus variables, **cambia,** según el valor que se tome de la variable independiente.

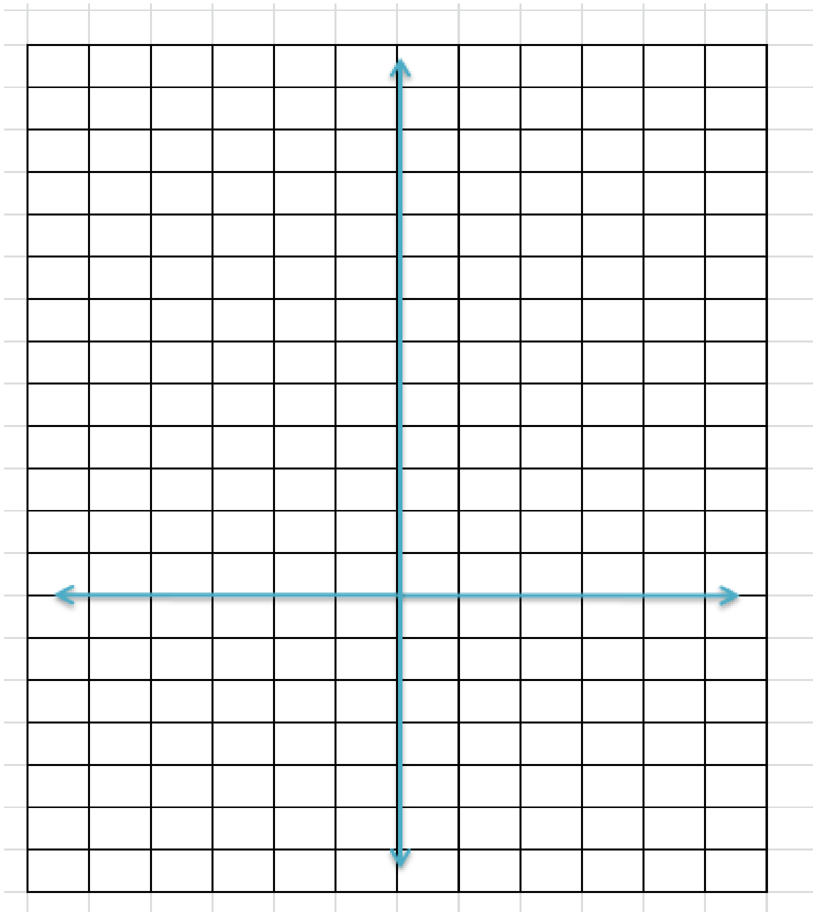
Es decir, al eje X se lo considera formado por conjuntos disjuntos entre sí (que no tienen intersección) para establecer la definición de la función.

Un ejemplo de función por partes es el siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,(x+3)^2 - 2 & si \quad x < (-2) \\ -3 & si \quad -2 \leq x < 2 \\ (x-3)^3 + 2 & si \quad 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

Observemos que el conjunto de valores que toma la variable independiente (en este caso todos los $x \in (-\infty\,, 5)$) se forma por intervalos que serían: $(-\infty\,,-2) \cup [-2\,,2) \cup [2\,,\ 5)$ pero si buscáramos la intersección entre ellos nos daría vacío.

Hagamos el gráfico de esta función



Nos va a interesar indicar

1) Dominio e Imagen de f

2) Intersección con los ejes coordenados

3) Paridad de f

4) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

5) Intervalos de positividad y negatividad de f

Vamos a ir contestando los requerimientos uno por uno:

1) El dominio de f lo integran todos los valores reales que puede tomar la variable independiente (x). En este caso $Dom\, f = (-\infty\,, 5)$

La imagen de f son todos los valores reales que se obtienen como resultados de aplicar la función a cada valor del dominio, o sea, todos los valores que puede tomar la variable dependiente (y). En este caso $Im\, f = \{-3\} \cup [-2\,,\ +\infty)$.

2) Observando el gráfico de la función notamos que tiene solo una intersección con eje X. Para encontrar intersecciones con eje X, daremos el valor cero a la variable Y.

Por otro lado, el punto donde corta al eje X se encuentra en el intervalo $(-\infty\,,-2)$. En este intervalo la ecuación de la función es la parábola $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$. Por consiguiente, es en esta expresión en la que daremos el valor cero a la variable y.

Nos quedará entonces:

$$0 = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2$$

Y eso es simplemente una ecuación cuadrática escrita en forma canónica, la cual debemos pasar a forma polinómica (o general) para buscar sus raíces, como ya sabemos.

$$0 = \frac{1}{2}(x^2+6x+9) - 2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} - 2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2} = 0$$

Podemos reconocer entonces los coeficientes a,b y c para poder aplicar Bhaskara,

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 3 \\ c = \dfrac{5}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = -5 \end{matrix}$$

Hemos dicho que el punto de corte con eje X se encuentra en el intervalo $(-\infty\,,-2)$ y el valor $x_1 = -1$ no pertenece a dicho intervalo, entonces DESCARTAMOS ese valor.

Concluiremos, entonces, que el punto de corte con eje X es el punto $A = (-5\,,0)$

También, observando el gráfico de la función notamos que tiene solo una intersección en eje Y. Para buscar intersección con eje Y daremos el valor cero a la variable X.

Por otro lado, el punto donde corta al eje X se encuentra en el intervalo $[-2\,,\ 2)$. En este intervalo la ecuación de la función es la recta constante $y = (-3)$. Por consiguiente, es en esta expresión en la que daremos el valor cero a la variable x.

El punto en cuestión, entonces es: $B = (0\,,-3)$

Y no tiene más puntos de intersección con los ejes coordenados

3) En este punto se nos pide analizar si la función es PAR, es IMPAR o no es ninguna de las dos cosas. Nos ayudamos con el gráfico y observamos que no tiene ninguna simetría (ni con eje X, ni con el origen de coordenadas), por lo cual podemos concluir que la función NO ES PAR NI IMPAR. Esto debemos justificarlo con contraejemplos.

Si fuera PAR debería cumplirse que $f(x) = f(-x)$, nosotros sabemos que esto no se cumplirá…basta entonces, con tomar dos valores adecuados.

Tomamos $x = 4$, entonces será $-x = (-4)$

Buscamos $f(4)$ en el intervalo $[2\,,5)$, para el cual la ecuación de la función es

$$y = (x-3)^3 + 2$$

Entonces $f(4) = (4-3)^3 + 2 = 1 + 2 = 3$. Tenemos que: $f(4) = 3$

Ahora buscamos $f(-4)$ en el intervalo $(-\infty\,,-2)$, para el cual la ecuación de la función es

$$y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2.$$

Entonces $f(-4) = \frac{1}{2}(-4+3)^2 - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$. Tenemos que: $f(-4) = -\frac{3}{2}$

Como puede observarse $f(4) \neq f(-4)$, luego la función NO ES PAR

Análogamente justificaremos que la función NO ES IMPAR buscando $f(-4)$ y $[-f(4)]$ para llegar a la conclusión que son distintas (el ejercicio le queda a los alumnos)

4) Veremos, ahora, su comportamiento en cuanto al crecimiento.

Observando el gráfico notamos que la función:

CRECE en el intervalo $(-3\,,-2)$ y también en el intervalo $(2\,,\ 5)$. Obsérvese que no lo decimos como una unión de intervalos, pues esto no sería correcto.

DECRECE en el intervalo $(-\infty\,,-3)$

Y en el intervalo $(-2\,,2)$ NO CRECE ni DECRECE, es una función constante

5) Los intervalos de POSITIVIDAD y NEGATIVIDAD, también los encontraremos observando el gráfico de la función. En este caso tenemos que la función es POSITIVA en el intervalo $(-\infty\,,-5)$ y también en el intervalo $(2\,,5)$

La función es NEGATIVA en el intervalo $(-5\,,2)$.

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 5.I

1) Graficar las siguientes funciones por partes. Para cada una estudiar:

a) Dominio e Imagen.

b) Intersección con los ejes coordenados.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Intervalos de positividad y negatividad.

e) Paridad

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}2x+4 & si\ x<0\\ 1 & si\ 0\le x\le 5\\ -2x & si\ x>7\end{cases}}$$

$$\boldsymbol{g(x)=\begin{cases}-2x^2+3 & si\ x\le 0\\ x^3+5 & si\ x>0\end{cases}}$$

$$\boldsymbol{h(x)=\begin{cases}x^2 & si-3<x<3\\ 2 & si\ 3\le x\le 5\\ -x+6 & si\ x>5\end{cases}}$$

$$\boldsymbol{m(x)=\begin{cases}\frac{4}{9}(x+3)^2-3 & si\ x<0\\ (x-1)^3+2 & si\ 0\le x\le 2\\ 5 & si\ 2<x\le 6\end{cases}}$$

6 FUNCIONES RACIONALES

Una función racional es una función de la forma:

$$\boxed{\boldsymbol{r(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}}}$$

donde *P* y *Q* son funciones polinomiales. Suponemos que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factor en común. Aun cuando las funciones racionales se construyen a partir de polinomios, sus gráficas tienen un aspecto muy diferente del de las gráficas de funciones polinomiales

6.1 FUNCIONES RACIONALES Y ASÍNTOTAS

El *dominio* de una función racional está formado por todos los números reales x excepto aquellos para los cuales el denominador es cero. Al hacer la gráfica de una función racional, debemos poner especial atención al comportamiento de la gráfica cerca de esos valores x. Empezamos por graficar una función racional muy sencilla.

EJEMPLO 1: Grafique la función racional $f(x) = \frac{1}{x}$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCIÓN: La función *f* no está definida para $x = 0$. Las tablas siguientes muestran que cuando x es cercana a cero, el valor de $f(x)$ es grande, y cuanto más se acerque x a cero, más grande se hace $f(x)$

X	f(x)
-10	-0,1
-100	-0,01
-100.000	-0,00001

SE APROXIMA A -

SE APROXIMA A 0

x	f(x)
10	0,1
100	0,01
100.000	0,00001

SE APROXIMA A

SE APROXIMA A 0

Estas tablas muestran que cuando x se hace grande, el valor de *f* (*x*) se aproxima y está cerca de cero. Describimos esta situación simbólicamente al escribir.

$$f(x) \to 0 \quad cuando\ x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to 0 \quad cuando \quad x \to \infty$$

Usando la información de estas tablas y localizando unos cuantos puntos adicionales, obtenemos la siguiente gráfica.

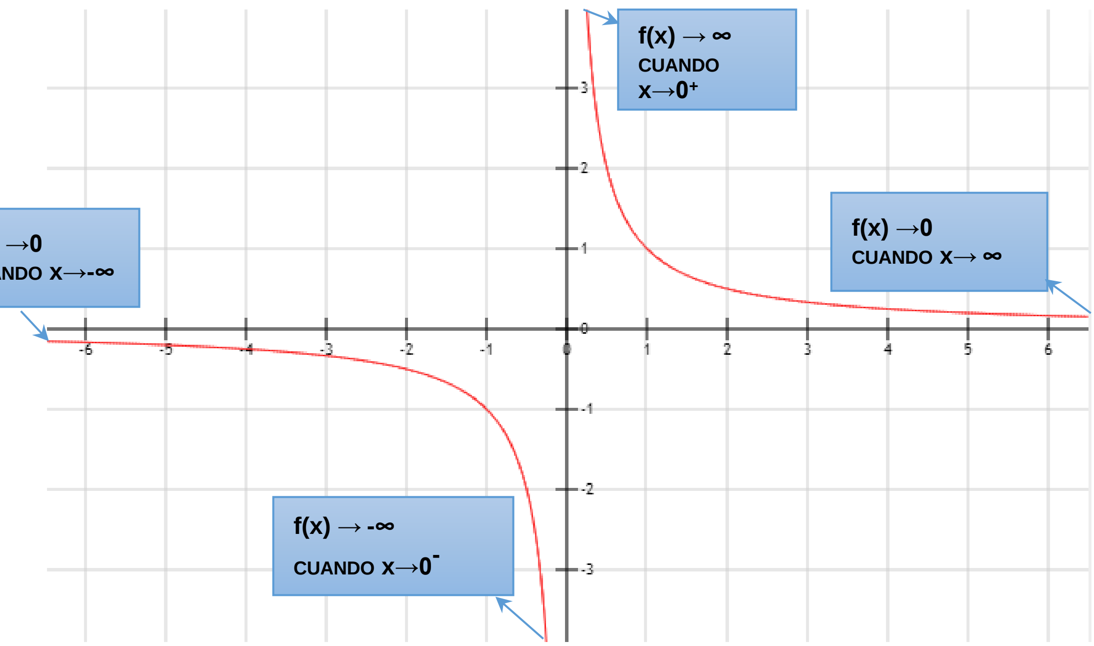


Figura 5 Grafica de f(x)=1/x

x	$f(x)=\frac{1}{x}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

La función *f* está definida para todos los valores de *x* que no sean 0, de modo que el dominio $\{x \mid x \neq 0\}$. De la gráfica vemos que el rango es

$$\{y \mid y \neq 0\}$$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 6.I

x	$a(x)$
1.5	
1.9	
1.99	
1.999	

x	$b(x)$
2.5	
2.1	
2.01	
2.001	

x	$c(x)$
10	
50	
100	
1000	

x	$d(x)$
-10	
-50	
-100	
-1000	

1. Dadas las funciones racionales

I. $a(x)=\frac{x}{x-2}$

II. $b(x)=\frac{3x-10}{(x-2)^2}$

III. $c(x)=\frac{4x+1}{x-2}$

IV. $d(x)=\frac{3x^2-1}{(x-2)^2}$

(a) Complete cada tabla para la función.

(b) Describa el comportamiento de la función cerca de su asíntota vertical, basada en las Tablas 1 y 2.

(c) Determine la asíntota horizontal, basada en las Tablas 3 y 4

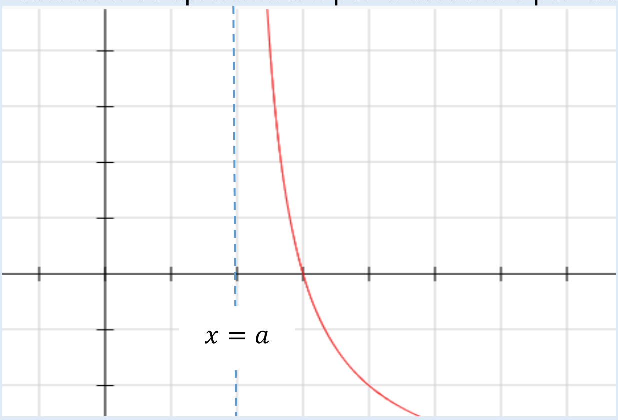
¡ATENCION!

Símbolo	*Significado*
$x \to a^-$	x SE APROXIMA A a POR LA IZQUIERDA
$x \to a^+$	x SE APROXIMA A a POR LA DERECHA
$x \to -\infty$	x SE VA AL INFINITO NEGATIVO; ES DECIR, x DECRECE SIN LÍMITE
$x \to \infty$	x SE VA AL INFINITO; ES DECIR x AUMENTA SIN LIMITE

Volviendo a la gráfica de $f(x)=\frac{1}{x}$, definimos que la recta $x = 0$ se denomina ***asíntota vertical*** de, y la recta *y* = 0 es una ***asíntota horizontal***. Informalmente hablando, una asíntota de una función es una recta a la que la gráfica de la función se acerca cada vez más cuando nos movemos a lo largo de la recta.

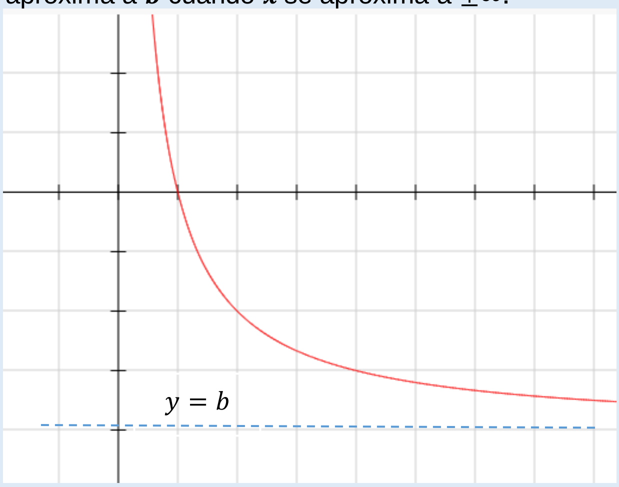
DEFINICIÓN DE ASÍNTOTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

1. La recta $\boldsymbol{x = a}$ es una asintota vertical de la función $\boldsymbol{y = f(x)}$ si $\boldsymbol{y}$ se aproxima a $\pm\infty$ cuando $\boldsymbol{x}$ se aproxima a $\boldsymbol{a}$ por la derecha o por la izquierda.



$$x \to a$$
$$cuando \;\; y \to \infty$$

2. La recta $\boldsymbol{y = b}$ es una asintota horizontal de la función $\boldsymbol{y = f(x)}$ si $\boldsymbol{y}$ se aproxima a $\boldsymbol{b}$ cuando $\boldsymbol{x}$ se aproxima a $\pm\infty$.



$$x \to b$$
$$cuando \;\; y \to \infty$$

Una función racional tiene asíntotas verticales donde la función no está definida, es decir, donde el denominador es cero.

6.2 TRANSFORMACIONES DE $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$

Una función racional de la forma $r(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ puede graficarse al desplazar, estirar y/o reflejar la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$.

EJEMPLO 2 : Grafique la función racional, y exprese el dominio y rango.

$$r(x) = \frac{2}{x-3}$$

SOLUCION

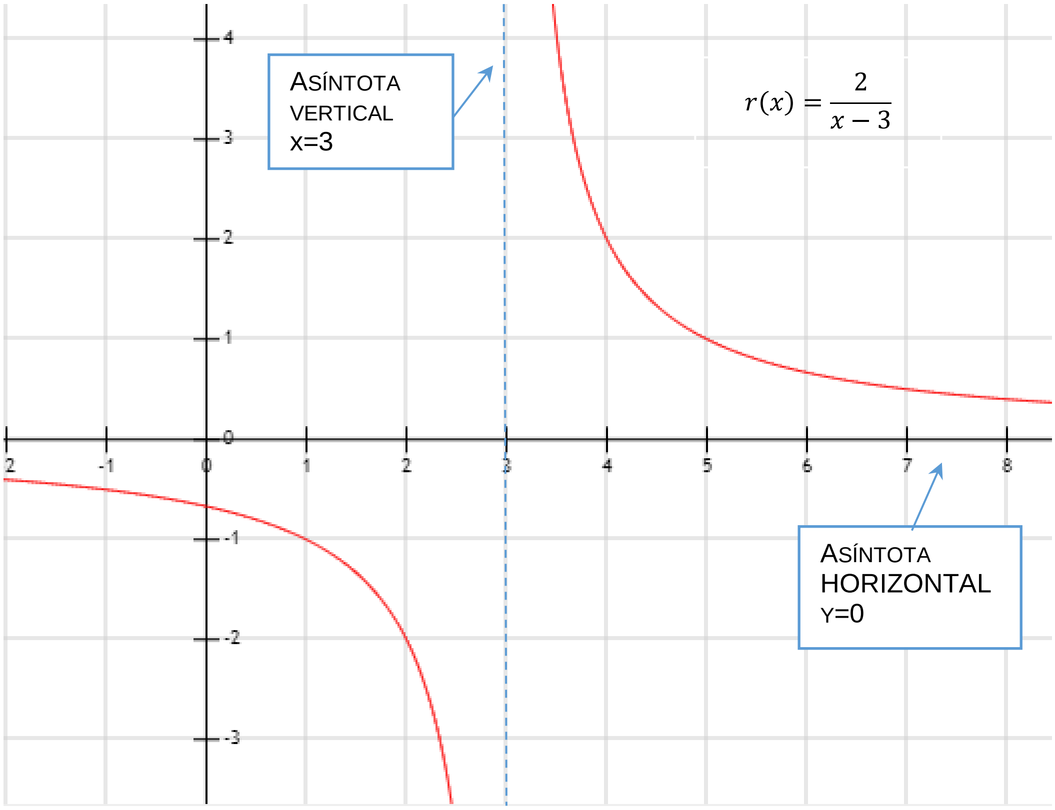
Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ entonces podemos expresar r en términos de f como sigue:

$$r(x) = \frac{2}{x-3}$$

$$= 2\left(\frac{1}{x-3}\right) \quad \text{Factorice 2}$$

$$= 2(f(x-3)) \quad \text{porque } f(x) = \frac{1}{x}$$

De esta forma vemos que la gráfica de *r* se obtiene de la gráfica de f al desplazar 3 unidades a la derecha y alargar verticalmente en un factor de 2. Entonces, *r* tiene asíntota vertical $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 0$. La gráfica de *r* se muestra en la siguiente figura.



La función *r* está definida para toda x que no sea 3, por lo que el dominio es $\{x|x \neq 3\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y|y \neq 0\}$.

EJEMPLO 3: Asíntotas de una función racional.

Grafique $r(x) = \frac{2x^2-4x+5}{x^2-2x+1}$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCION

Asíntota vertical: Primero factorizamos el denominador

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2}$$

$$La\ recta\ x = 1$$

$$es\ una\ asintota\ vertical\ porque\ el\ denominador\ de\ r\ es\ cero\ cuando\ x = 1$$

Asíntota horizontal: La asíntota horizontal es el valor que alcanza *y* cuando $x \to \pm\infty$.

Para ayudarnos a hallar este valor, dividimos numerador y denominador entre x^2, la potencia superior de *x* que aparece en la expresión:

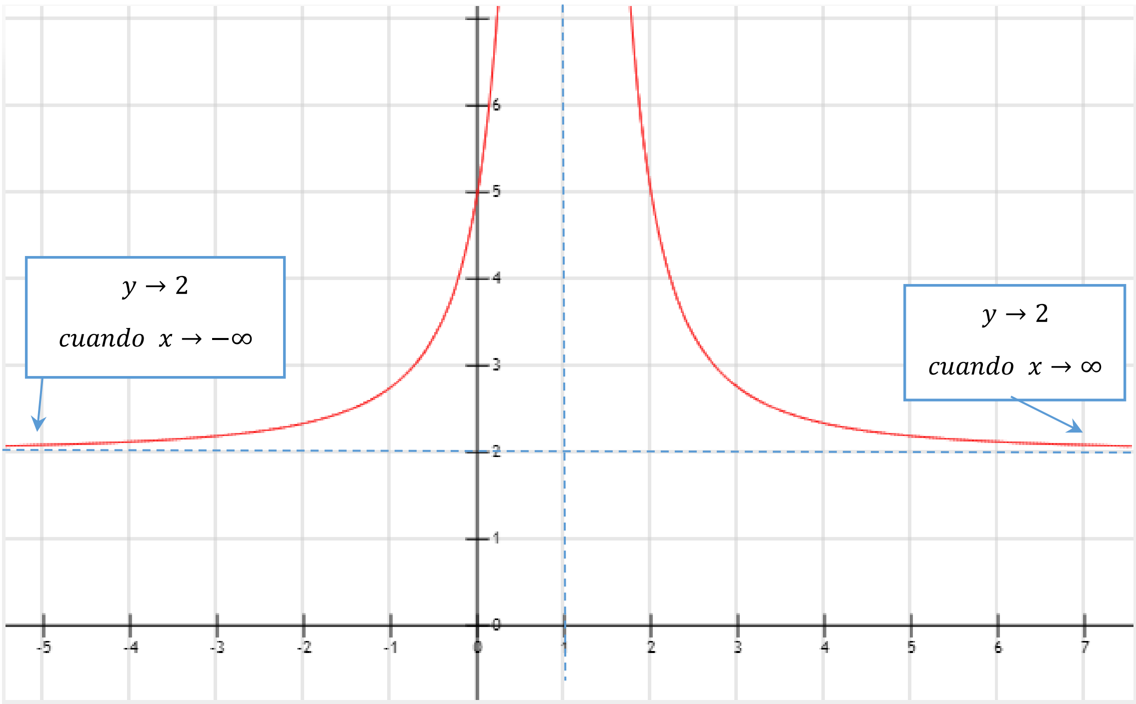
$$y = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$Las\ expresiones\ fraccionarias\ \frac{4}{x}, \frac{5}{x^2}, \frac{2}{x}\ y\ \frac{1}{x^2}$ se aproximan a cero cuando $x \to \pm\infty$.

Entonces $y = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$

La asíntota horizontal es la recta $y = 2$

Dominio y rango: La función *r* está definida para todos los valores de *x* que no sean 1, de modo que el dominio es $\{x | x \neq 1\}$. De la gráfica vemos que el rango es$\{y | y > 2\}$.



HALLAR ASINTOTAS DE FUNCIONES RACIONALES

SEA r LA FUNCIÓN RACIONAL

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

1. LAS ASÍNTOTAS VERTICALES DE r SON LAS RECTAS $x = a$, DONDE a ES UN CERO DEL DENOMINADOR.
2.
   (a) SI $n < m, entonces\ r\ tiene\ asintota\ horizontal\ y = 0$.
   (b) SI $n = m, entonces\ r\ tiene\ asintota\ horizontal\ y = \frac{a_n}{b_n}$.
   (c) SI $n > m, entonces\ r\ no\ tiene\ asintota\ horizontal.$

EJEMPLO 4: Encuentre las asíntotas vertical y horizontal de $r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$

SOLUCION

Asíntotas verticales:

Primero factorizamos

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{(2x-1)(x+2)}$$

$$2x - 1 = 0 \qquad\qquad cuando\ x = \frac{1}{2}$$

$$x + 2 = 0 \qquad\qquad cuando\ x = -2$$

Por lo que las asíntotas verticales son las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$

Asíntota horizontal:

Los grados del numerador y denominador son iguales, y

$$\frac{coeficiente\ prinipal\ de\ numerador}{coeficiente\ principal\ de\ denominador} = \frac{3}{2}$$

Entonces la asíntota horizontal es la recta $y = \frac{3}{2}$.

TRAZADO DE GRAFICAS DE FUNCIONES RACIONALES

1. FACTORIZAR: FACTORICE EL NUMERADOR Y DENOMINADOR.
2. PUNTOS DE INTERSECCIÓN: ENCUENTRE LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN $\boldsymbol{x}$ AL DETERMINAR LOS CEROS DEL NUMERADOR, ASÍ COMO LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN $\boldsymbol{y}$ A PARTIR DEL VALOR DE LA FUNCIÓN EN $\boldsymbol{x = 0}$
3. ASÍNTOTAS VERTICALES: ENCUENTRE LAS ASÍNTOTAS VERTICALES AL DETERMINAR LOS CEROS DEL DENOMINADOR Y, A CONTINUACIÓN, VEA SI $\boldsymbol{y} \to \infty$ $\boldsymbol{o}$ $\boldsymbol{y} \to -\infty$ EN CADA LADO DE CADA ASÍNTOTA VERTICAL MEDIANTE EL USO DE VALORES DE PRUEBA.
4. ASÍNTOTA HORIZONTAL: ENCUENTRE LA ASÍNTOTA HORIZONTAL (SI LA HAY) USANDO EL PROCEDIMIENTO DESCRITO ANTERIORMENTE.
5. TRAZAR LA GRÁFICA: GRAFIQUE LA INFORMACIÓN DADA POR LOS PRIMEROS CUATRO PASOS. A CONTINUACIÓN, LOCALICE TANTOS PUNTOS ADICIONALES COMO SEA NECESARIO, PARA LLENAR EL RESTO DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN.

6.3 EJERCITACION

Dadas las siguientes funciones, grafique y encuentre todas las asíntotas horizontales y verticales (si las hay)

a) $r(x) = \frac{1}{x-1}$
b) $s(x) = \frac{3}{x+1}$
c) $t(x) = \frac{-2}{x-2}$
d) $u(x) = \frac{1}{x} + 3$
e) $w(x) = \frac{1}{x-1} + 1$
f) $y(x) = \frac{1}{x^2}$
g) $q(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$
h) $v(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$

7 FUNCIONES IRRACIONALES

Las Funciones Irracionales (también llamadas Funciones Radicales) son aquellas funciones en las cuales una expresión algebraica de x está debajo de un signo radical (raíz cuadrada, cúbica, etc).

Su forma general es:

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{P(x)}}}$$

donde $P(x)$ es una expresión algebraica, un polinomio.

En este tipo de función debemos tener en cuenta y recordar que, si la raíz tiene un índice par (si n es un número par) se necesita que $P(x)$ sea positivo o nulo, es decir debemos plantearnos que sea $P(x) \geq 0$.

Esta condición será la que determine el DOMINIO de la función.

Si el índice es impar (n es un número impar) no se necesita restricción alguna para el polinomio radicando, entonces el dominio de la función serán todos los reales.

Estudiemos un ejemplo muy simple de las funciones irracionales: $f(x) = \sqrt{x}$.

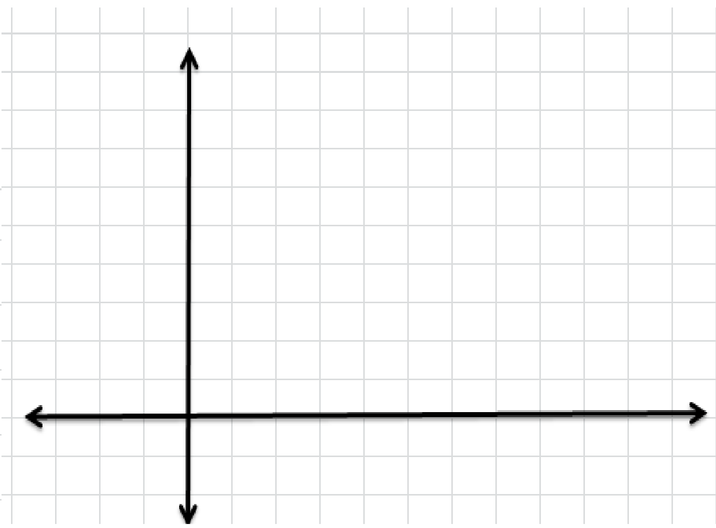
Hemos mencionado que el Dominio de estas funciones está formado por los valores que pueda tomar la variable independiente x . En este caso debe ser $x \geq 0$, lo cual nos indica que el Dominio de $f(x)$ es el intervalo $[0\,, \ +\infty)$

En su momento hemos aclarado, por otro lado, que el resultado de una raíz cuadrada (como es la que estamos estudiando) SIEMPRE será positivo, es decir, siempre tomaremos el resultado positivo de una raíz cuadrada.

Esto hace que, la imagen de $f(x)$ sea el intervalo $[0\,, \ +\infty)$.

Plantearemos una tabla de valores para poder llegar a obtener el gráfico de la función

x	$f(x)$
0	
1	
4	
9	



Como venimos haciendo con las funciones estudiadas anteriormente, en este caso, nos va a interesar estudiar:

1) Dominio e Imagen de $f(x)$
2) Intersección con los ejes coordenados, si las tiene
3) Ecuaciones de sus asíntotas, si las tiene
4) Paridad de $f(x)$
5) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$

6) Intervalos de positividad y negatividad de $f(x)$

Vamos a ir contestando los requerimientos uno por uno:

1) Tal lo dicho, anteriormente, el *dominio* de f es $Dom\, f = [0\,,\ +\infty)$ y la *imagen* de f es $Im\, f = [0\,,\ +\infty)$

2) Observando el gráfico de la función notamos que tiene intersección con eje X, en el punto $P = (0\,,0)$. Para encontrar intersecciones con eje X, daremos el valor cero a la variable Y. Analíticamente proponemos $\sqrt{x} = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$

También, observando el gráfico de la función notamos que tiene intersección con eje Y, en el punto $Q = (0\,,0)$. Para encontrar intersecciones con eje Y, daremos el valor cero a la variable X, o lo que es lo mismo, buscamos $f(0)$ hallando que $f(0) = \sqrt{0} = 0$

3) Esta función NO TIENE ASÍNTOTAS

4) En este punto se nos pide analizar si la función es PAR, es IMPAR o no es ninguna de las dos cosas. Nos ayudamos con el gráfico y observamos que no tiene ninguna simetría (ni con eje X, ni con el origen de coordenadas), por lo cual podemos concluir que la función NO ES PAR, NI IMPAR. Esto debemos justificarlo con contraejemplos.

Si fuera PAR debería cumplirse que $f(x) = f(-x)$, nosotros sabemos que esto no se cumplirá…basta entonces, con tomar dos valores adecuados.

Tomamos $x = 4$, entonces será $(-x) = (-4)$

Buscamos $f(4)$ y obtenemos que $f(4) = \sqrt{4} = 2$

Ahora buscamos $f(-4)$ y debemos concluir que NO EXISTE, puesto que el número (-4) NO PERTENECE al dominio de la función, $\nexists\, f(-4)$

Como puede observarse $f(4) \neq f(-4)$, luego la función NO ES PAR

Debemos analizar, ahora, si es impar y notamos en el gráfico que no tiene simetría con el origen de coordenadas por lo cual no será una función IMPAR. Esto hay que probarlo analíticamente.

En una función impar se cumple que: $f(-x) = -f(x)$

Por el contraejemplo analizado anteriormente tenemos que: $f(4) = \sqrt{4} = 2$ y que no existe $f(-4)$, es decir que $f(4) \neq f(-4)$, luego la función NO ES IMPAR

5) Veremos, ahora, su comportamiento en cuanto al crecimiento.

Observando el gráfico notamos que la función CRECE en todo su recorrido, en todo su dominio.

Para probar lo que acabamos de afirmar vamos a considerar:

Sean $x_1\,, x_2 \in [0\,,\ +\infty)$, es decir dos números positivos tales que $x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)$$

Por tanto $f(x)$ es Creciente en el intervalo $[0\,,\ +\infty)$

6) Los intervalos de POSITIVIDAD y NEGATIVIDAD, también los encontraremos observando el gráfico de la función. En este caso tenemos que la función es POSITIVA en todo su dominio

O sea $C^+ = [0\,,+\infty)$ y no tiene intervalos de negatividad

Analíticamente los buscamos de la siguiente forma:

$$C^{+} = \{x \in Dom\, f(x)\ tales\ que\ f(x) \geq 0$$

Debe ser, entonces, $f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} \geq 0$

Pero esto es VERDADERO para todos los elementos del dominio, es decir $\forall\, x \in [0\,,\ +\infty)$

Luego: $C^{+} = [0\,,\ +\infty)$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 7.I

Dadas las funciones: $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{-x+4} - 3}$, $\boldsymbol{h(x) = \sqrt{x^2 - 4}}$ y $\boldsymbol{k(x) = -\sqrt{x} + 3}$

a) Graficar. Determinar dominio e imagen.

b) Hallar los puntos de intersección con los ejes cartesianos, si existen

c) Indicar intervalos de crecimiento y decrecimiento y justificar analíticamente

d) Hallar analíticamente los intervalos de positividad y negatividad

e) Analizar paridad.

8 FUNCIONES EXPONENCIALES

La **función exponencial con base** a está definida para todos los números reales x por:

$$\boldsymbol{f(x) = a^x \qquad donde\ a > 0\ y\ a \neq 1}$$

Suponemos que $a \neq 1$ porque la función $f(x) = 1^x = 1$ es precisamente una función constante.

A continuación veamos algunos ejemplos de funciones exponenciales:

$\boldsymbol{g(x) = 2^x}$	$\boldsymbol{h(x) = 3^x}$	$\boldsymbol{i(x) = 10^x}$
$\boldsymbol{g(x)\ tiene\ base\ 2}$	$h(x) tiene\ base\ 3$	$i(x) tiene\ base\ 10$

EJEMPLO 1: Evaluación de funciones exponenciales

Sea $f(x) = 3^x$, evalúe lo siguiente:

(a) $f(2)$

(b) $f(\pi)$

(c) $f(-2/3)$

(d) $(f(\sqrt{2})$

SOLUCIÓN

Usamos calculadora para obtener los valores de *f*.

(a) $f(2) = 3^2 = 9$

(b) $f(\pi) = 3^{\pi} \approx 31.544$

(c) $f(-2/3) \approx 0.4807$

(d) $f(\sqrt{2}) \approx 4.7288$

8.1 GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Primero graficamos funciones exponenciales al localizar puntos. Veremos que las gráficas de esas funciones tienen una forma fácilmente reconocible.

EJEMPLO 2 Graficado de funciones exponenciales al localizar puntos

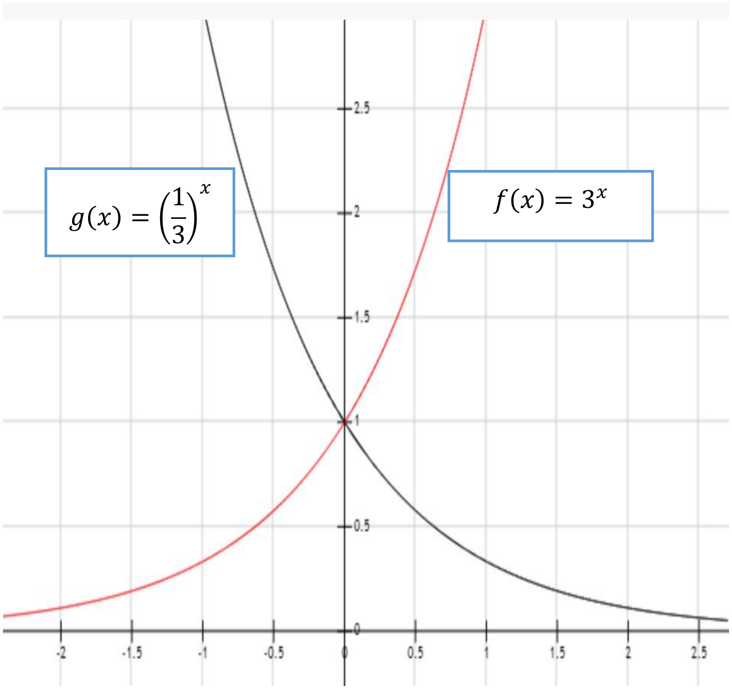
Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = 3^x$

(b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

SOLUCIÓN Calculamos valores de $f\,(x)\ y\ g(x)$ y localizamos puntos para trazar las gráficas de la Figura 1.

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$



Observe que: $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^{-x} = f(-x)$ de modo que hemos obtenido la gráfica de g a partir de la gráfica de *f* al reflejar en el eje *y*.

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 8.I

Grafique ambas funciones en un conjunto de ejes.

(a) $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$

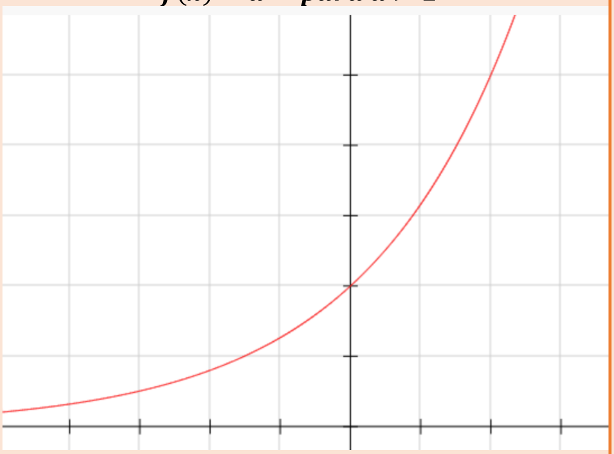
(b) $\boldsymbol{g(x) = 2^{-x}}$

GRAFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

La función exponencial

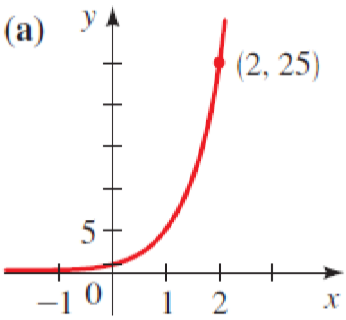
$$\boldsymbol{f(x) = a^x} \qquad (\boldsymbol{a > 0, a \neq 1})$$

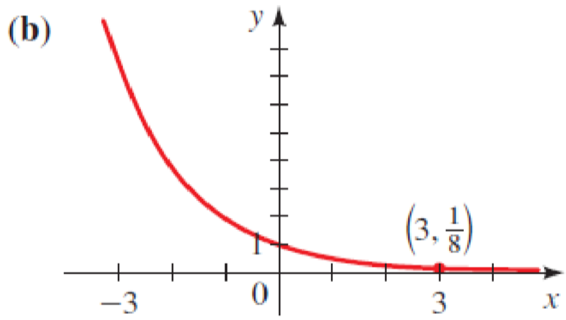
Tiene dominio $\boldsymbol{R}$ y rango $(\mathbf{0}, \infty)$. La recta $\boldsymbol{y = 0}$ (el eje $\boldsymbol{x}$) es una asíntota horizontal de $\boldsymbol{f}$. La grafica de $\boldsymbol{f}$ tiene una de las siguientes formas.

$\boldsymbol{f(x) = a^x \quad para\ a > 1}$	$f(x) = a^x \quad para\ 0 < a < 1$
	

EJEMPLO 3: Identificar gráficas de funciones exponenciales

Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica se da.





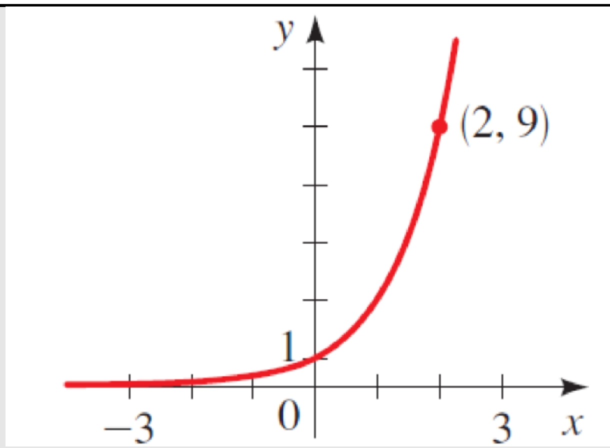
SOLUCION

(a) Como $f(2) = a^2 = 25, vemos\ que\ la\ base\ es\ a = 5.\ Entonces\ f(x) = 5^x$

(b) Como $f(3) = a^3 = \frac{1}{8}, vemos\ que\ la\ base\ es\ a = \frac{1}{2}.\ Entonces\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 8.II

Encuentre la función exponencial $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ cuya gráfica nos dan



EJEMPLO 4: Transformaciones de funciones exponenciales.

Use la gráfica de $f\ (x)\ =\ 2^x$ para trazar la gráfica de cada función.

(a) $g(x) = 1 + 2^x$

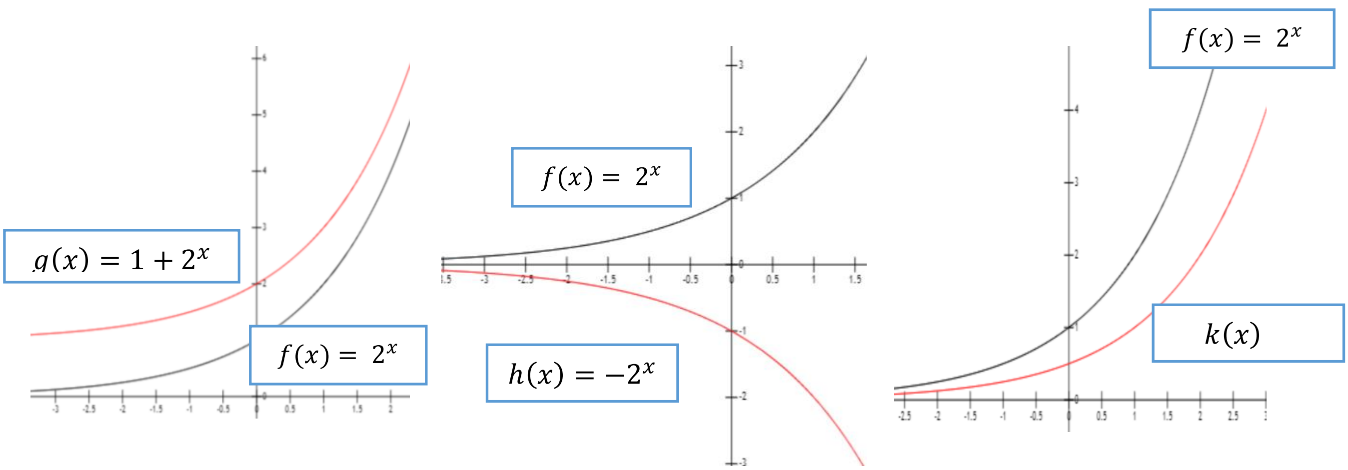
(b) $h(x) = -2^x$
(c) $k(x) = 2^{x-1}$

SOLUCIÓN

(a) Para obtener la gráfica de $g(x)$, empezamos con la gráfica $de\ f(x) =\ 2^x$ y la desplazamos 1 unidad hacia arriba. Observe de la Figura 3(a) que la recta $y = 1$ es ahora una asíntota horizontal.

(b) De nuevo empezamos con la gráfica de $f(x) =\ 2^x$, pero aquí reflejamos en el eje x para obtener la gráfica de $h(x)$ que se ve en la Figura 3(b).

(c) Esta vez empezamos con la gráfica de $f(x)$ y la desplazamos a la derecha 1 unidad para obtener la gráfica de $k(x)$ que se muestra en la Figura 3(c).



CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 8.III

Grafique la función, no localizando puntos sino empezando desde las gráficas conocidas. Exprese el dominio, rango y asíntota

(a) $f(x) = -3^x$
(b) $g(x) = 2^x - 3$
(c) $h(x) = 10^{x+3}$

8.2 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

La función exponencial natural es la función exponencial con base e. Es frecuente llamarla función exponencial.

$$\boldsymbol{f(x) = e^x}$$

Como $2 < e < 3$, la gráfica de la función exponencial natural está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$.

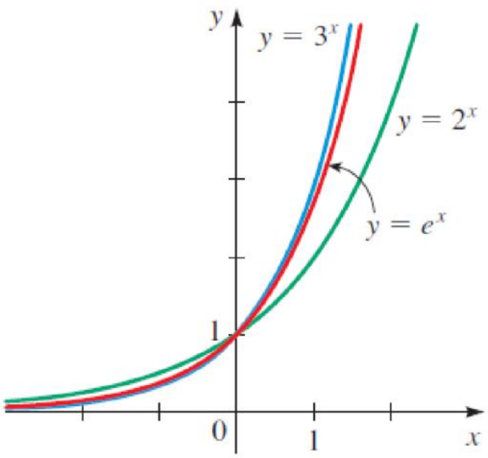


Figura 6: Graficas de funciones exponenciales

EJEMPLO1: Evaluación de la función exponencial

Evalúe cada expresión redondeada a cinco lugares decimales

(a) e^3
(b) $2e^{-0.53}$
(c) $e^{4.8}$

SOLUCION Usamos la tecla e^x de una calculadora para evaluar la función exponencial.

(a) $e^3 \approx 20.08554$
(b) $2e^{-0.53} \approx 1.17721$
(c) $e^{4.8} \approx 121.51042$

EJEMPLO 2: Transformaciones de la función exponencial

Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = e^{-x}$
(b) $g(x) = 3e^{0,5x}$

SOLUCIÓN

(a) Empezamos con la gráfica de $y = e^{x}$ y reflejamos en el eje *y* para obtener la gráfica de $y\ = e^{-x}$.

(b) Calculamos varios valores, localizamos los puntos resultantes y luego enlazamos los puntos con una curva sin irregularidades. La gráfica se ilustra en siguiente figura.

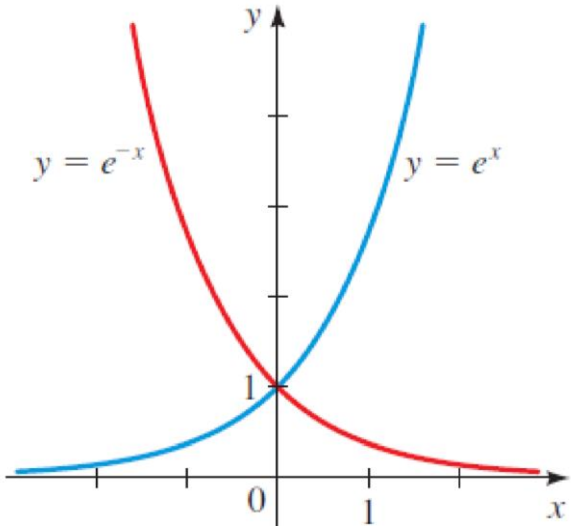
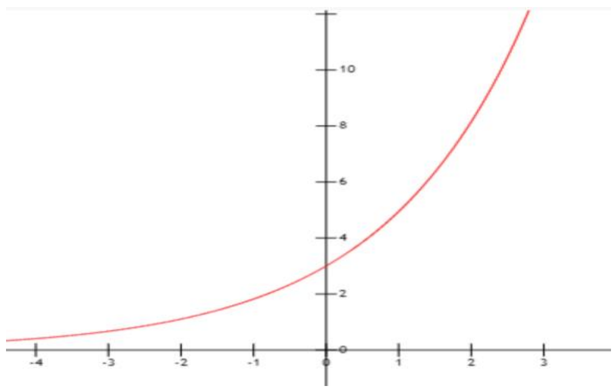


Figura: 7 Graficas de funciones exponenciales

	$f(x) = 3e^{0.5x}$
−3	0.67
−2	1.10
−1	1.82
0	3.00
1	4.95
2	8.15
3	13.45



EJEMPLO 3 Un modelo exponencial para la propagación de un virus

Una enfermedad infecciosa empieza a propagarse en una ciudad pequeña de 10,000 habitantes. Después de *t* días, el número de personas que han sucumbido al virus está modelado por la función

$$v(t) = \frac{10{,}000}{5 + 1245e^{-0.97t}}$$

(a) ¿Cuántas personas infectadas hay inicialmente (tiempo $t = 0$)?

(b) Encuentre el número de personas infectadas después de un día, dos días y cinco días.

(c) Grafique la función y describa su comportamiento.

SOLUCIÓN

(a) Evaluando en t=0, concluimos que 8 personas inicialmente tienen la enfermedad.

(b) Usando calculadora, evaluamos para los distintos días y a continuación redondeamos para obtener los siguientes valores.

DÍAS	PERSONAS INFECTADAS
1	21
2	54
5	678

(c) De la gráfica de la Figura 8 vemos que el número de personas infectadas primero sube lentamente, luego sube con rapidez entre el día 3 y el día 8 y por último se nivela cuando alrededor de 2000 personas están infectadas.

La gráfica de la Figura 8 recibe el nombre de *curva logística* o *modelo de crecimiento logístico*. Curvas como ésta se presentan con frecuencia en el estudio de crecimiento poblacional.

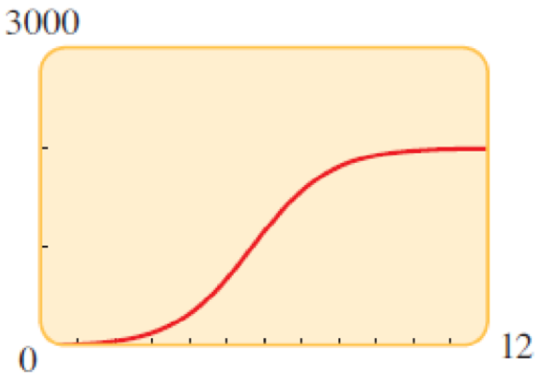


Figura 8: Curva logística

$$v(t) = \frac{10{,}000}{5 + 1245e^{-0.97t}}$$

8.3 EJERCITACION

1. Complete la tabla de valores, redondeados a dos lugares decimales, y trace una gráfica de la función:

x	$f(x) = 3e^x$
-2	
-1	
-0.5	
0	
0.5	
1	
2	

x	$f(x) = 2e^x$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

2. Grafique la función, a partir de la gráfica de $y = e^x$ (sin realizar tabla de valores). Exprese el dominio, rango y asíntota.

(a) $f(x) = -e^x$

(b) $y = e^{-x} - 1$

(c) $i(x) = e^{x-2}$

(d) $y = 1 - e^x$

(e) $g(x) = -e^{-x}$

(f) $h(x) = e^{x-2}$

(g) $y = e^{x-3} + 4$

(h) $y = -e^{x-1} - 2$

3.

(a) Trace las gráficas de la familia de funciones:

$$f(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right) \qquad para\ a = 0.5, 1, 1.5\ y\ 2$$

(b) ¿De qué forma u valor grande de a afecta a la gráfica?

4. Una paracaidista salta desde una altura razonable sobre el suelo. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a la velocidad de ella, y la constante de proporcionalidad es 0.2. Se puede demostrar que la velocidad hacia abajo de la paracaidista en el tiempo *t* está dada por:

$$v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$$

Donde t se mide en segundos y $v(t)$se mide en pies por segundo (pies/s)

(a) Encuentre la velocidad inicial de la paracaidista.

(b) Encuentre la velocidad después de 5 s y después de 10 s.

(c) Trace una gráfica de la función de velocidad $v(t)$.

(d) La velocidad máxima de un cuerpo en caída con resistencia del viento se denomina *velocidad terminal*. De la gráfica de la parte (c), encuentre la velocidad terminal de esta paracaidista.

5. Un barril de 50 galones se llena por completo de agua pura y, a continuación, se le bombea agua salada con concentración de 0.3 lb/gal al barril, y la mezcla resultante se derrama con la misma rapidez. La cantidad de sal en el barril en el tiempo t está dada por:

$$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$$

Donde t se mide en minutos y $Q(t)$ se mide en libras.

(a) ¿Cuánta sal hay en el barril después de 5 minutos?

(b) ¿Cuánta sal hay en el barril después de 10 minutos?

(c) Trace una gráfica de la función $Q(t)$.

(d) Use la gráfica de la parte (c) para determinar el valor al que se aproxima la cantidad de sal del barril cuando t se hace grande. ¿Es esto lo que usted esperaba?

6. La tasa de crecimiento relativa de la población mundial ha estado disminuyendo continuamente en años recientes. Con base en esto, algunos modelos de población predicen que la población mundial se estabilizará por último en un nivel que el planeta pueda sostener. Uno de estos modelos logísticos es:

$$P(t) = \frac{73.2}{6.1 + 5.9e^{-0.02t}}$$

Donde *t* = 0 es el año 2000 y la población se mide en miles de millones.

(a) ¿Qué población mundial predice este modelo para el año 2200? ¿Y para el año 2300?

(b) Trace una gráfica de la función *P* para los años 2000 a 2500.

(c) De acuerdo con este modelo, ¿a qué número parece aproximarse la población mundial a medida que pasa el tiempo?

9 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Sea *a* un número positivo con $a \neq 1$. La **función logarítmica con base *a***, denotada por **loga**, está definida por

$$x = y \leftrightarrow a^y = x$$

Por lo tanto, x es el *exponente* al cual la base a debe ser elevada para obtener x. Cuando usamos la definición de logaritmos para pasar entre la forma logarítmica $x = y$ y la forma exponencial $a^y = x$, es útil observar que, en ambas formas, la base es la misma:

FORMA LOGARÍTMICA	FORMA EXPONENCIAL
EXPONENTE $\log_a x = y$ BASE	EXPONENTE $a^y = x$ BASE

EJEMPLO 1: Formas logarítmicas y exponenciales

Las formas logarítmicas y exponenciales son ecuaciones equivalentes: si una es verdadera, también lo es la otra. Por lo tanto, podemos pasar de una forma a la otra como en las siguientes ilustraciones.

FORMA LOGARÍTMICA	FORMA EXPONENCIAL
$\mathbf{100,000 = 5}$ $\mathbf{8 = 3}$ $\mathbf{\frac{1}{8} = -3}$ $\boldsymbol{S = r}$	$10^5 = 100,000$ $2^3 = 8$ $2^{-3} = \frac{1}{8}$ $5^r = S$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 9.I

Complete la tabla al hallar la forma logarítmica o exponencial apropiada de la ecuación.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\mathbf{8 = 1}$	
$\mathbf{64 = 2}$	
	$8^{\frac{2}{3}} = 4$
	$8^3 = 512$
$\mathbf{\frac{1}{8} = -1}$	
	$8^{-2} = \frac{1}{64}$

EJEMPLO 2: Resolver una ecuación exponencial

Encuentre la solución de la ecuación $3^{x+2} = 7$, redondeada a seis lugares decimales.

SOLUCION Tomamos el logaritmo común de cada lado

$3^{x+2} = 7$ *Ecuación dada*

$log(3^{x+2}) = log\ log\ 7$ *Tome log de cada lado*

$(x+2)log3 = log7$ *Bajar exponente (propiedad)*

$x + 2 = \frac{log7}{log3}$ *Divida entre log 3*

$x = \frac{log\,log\ 7}{log3} - 2$ *Reste 2*

$x \approx -0.228756$ *Calcule*

VERIFICACION DE LA RESPUESTA

Sustituyendo $x = -0.228756$ *en la ecuación original y usando calculadora, obtenemos*

$$3^{(-0.228756)+2} \approx 7$$

EJEMPLO 3: Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $8e^{2x} = 20$.

SOLUCION Primero dividimos entre 8 para aislar el término exponencial en un lado de la ecuación.

$8e^{2x} = 20$ *Ecuación dada*

$e^{2x} = \frac{20}{8}$ *Divida entre 8*

$ln\ e^{2x} = ln\frac{20}{8}$ *Tome el ln de cada lado*

$2x = ln\ 2.5$ *Propiedad de logaritmo*

$x = \frac{ln\ 2.5}{2}$ *Divida entre 2*

$x \approx 0.458$ *Calcule*

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 9.II

Encuentre la solución de la ecuación exponencial, redondeada a cuatro lugares decimales.

$$\mathbf{3e^{x} = 10}$$

BIBLIOGRAFÍA

- "Precálculo matemáticas para el cálculo" sexta edición. James Stewart, Lothar Redlin Saleen Watson. International Thomson Editores 2012.
- Apunte de catedra Matemática I. Autora Myriam Chiacchirini, Dpto. de Matemática. Facultad de Economía y Administración. UNCo 2018.

UNIDAD 4 – NOCIONES DE TRIGONOMETRÍA

ANOTADOR DE CONSULTAS

1 SISTEMAS DE MEDICIONES DE ÁNGULOS

Existen tres sistemas de medición de ángulos que son: Sistema Sexagesimal, Sistema Centesimal y Sistema Circular o Radial.

Comenzaremos estudiando el más conocido de ellos que es el **SISTEMA SEXAGESIMAL.**

En este sistema, las unidades son tres: El grado sexagesimal, el minuto y el segundo. Es el sistema que seguramente todos hemos conocido y con el que se encuentran graduados los instrumentos de medición habituales como el transportador.

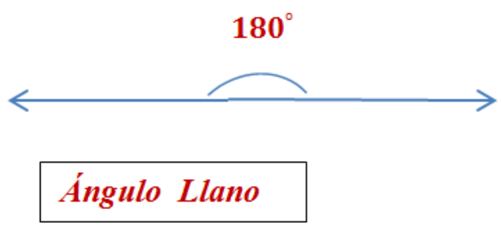
Se llama “Sexagesimal” porque cada unidad superior se obtiene con 60 unidades del grado inferior. Así: 60 segundos forman 1 minuto y 60 minutos forman 1 grado sexagesimal.

Estas unidades se escriben con un circulo en la parte superior (°) para indicar los grados, tilde en la parte superior (´) para indicar los minutos y tilde doble en la parte superior (´´) para indicar los segundos.

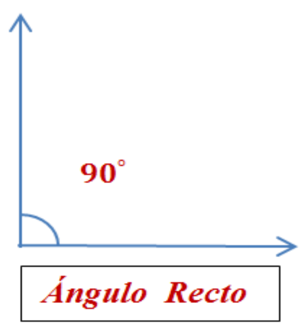
Por ejemplo diremos que el ángulo $\hat{\alpha} = 25^{\circ}12'37''$ mide 25 grados sexagesimales, 12 minutos y 37 segundos.

En este sistema un ángulo de un giro completo medirá 360°

el ángulo de medio giro será de 180° (conocido como ángulo llano) y



el ángulo de un cuarto de giro medirá 90° (conocido como ángulo recto)



Podemos operar con ángulos, siempre teniendo en cuenta que trabajaremos con los bloques de la misma unidad y luego, utilizando la relación existente entre unidades dentro del sistema, escribiremos el resultado en su forma más simplificada.

Por ejemplo: Sea $\hat{\gamma} = 110°42´$

Si queremos duplicarlo, deberíamos hacer el producto $2\,.\hat{\gamma} = 2\,.\,(110°42´)$ esto resulta en lo siguiente: $2\,.\hat{\gamma} = 2\,.\,(110°42´) = 220°\,84´$

Pero como se mostró más arriba, por cada $60´$ se forma un grado mas, entonces el ángulo resultante nos quedaría: $220°\,84´ = 221°\,24´$

El mismo razonamiento usaremos para sumar o restar dos ángulos, como veremos con el siguiente ejemplo:

Sean $\hat{\alpha} = 97°\,46´$ y $\hat{\beta} = 78°22´$

Hacer la suma entre ellos, significa hacer: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 97°\,46´ + 78°\,22´ = 175°\,68´ = 176°\,8´$

Hacer la resta entre ellos, significa hacer: $\hat{\alpha} - \hat{\beta} = 97°\,46´ - 78°\,22´ = 19°\,24´$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.I
Siendo $\hat{\alpha} = 27°\,31´$ y $\hat{\beta} = 112°45´$ Calcular: a) $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ b) $3\,.\,\hat{\alpha} + 72°15´$ c) $4\,.\,\hat{\beta} + 2\,.\,\hat{\alpha}$

Seguidamente, pasaremos a estudiar el sistema de medición de ángulos conocido como **"SISTEMA CENTESIMAL".**

En este sistema, las unidades también son tres: El grado centesimal, el minuto y el segundo.

Se pensó en buscar un sistema de medición de ángulos que tenga una mayor afinidad y relación con nuestro sistema de numeración, el cual, como sabemos, va formando sus unidades superiores cada 10 unidades inferiores.

Dicho de otro modo, el sistema de numeración adoptado en el mundo es el Sistema decimal con lo cual se plantea una diferencia con el sexagesimal que mide ángulos.

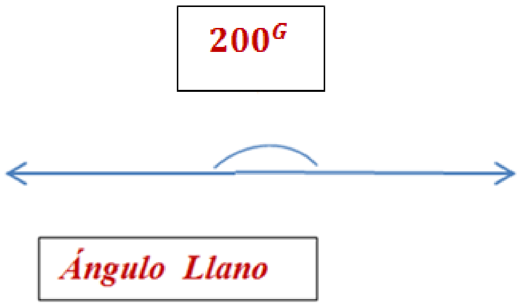
Este sistema se llama "Centesimal" porque cada unidad superior se obtiene con 100 unidades del grado inferior. Así: 100 segundos forman 1 minuto y 100 minutos forman 1 grado centesimal.

Estas unidades se escriben con una letra "G" en la parte superior (^{G}) para indicar los grados centesimales, tilde en la parte superior (´) para indicar los minutos centesimales y tilde doble en la parte superior (´´) para indicar los segundos centesimales.

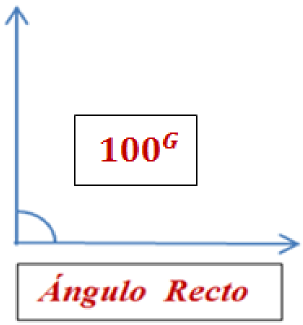
Por ejemplo diremos que el ángulo $\hat{\beta} = 18^G 15´42´´$ mide 18 grados centesimales, 15 minutos centesimales y 42 segundos centesimales.

En este sistema un ángulo de un giro completo medirá 400^G

el ángulo de medio giro será de 200^G (conocido como ángulo llano) y



el ángulo de un cuarto de giro medirá 100^G (conocido como ángulo recto)



Ya podemos entonces, comenzar a establecer equivalencias entre ellos….

Ejemplo 1) : El ángulo $\hat{\gamma} = 72°$, está dado en sistema sexagesimal. Expresar su medida en sistema centesimal

Según hemos visto, en el sistema sexagesimal un ángulo recto mide 90° pero ese mismo ángulo, medido con el sistema centesimal medirá 100^G . De aquí podemos plantear la relación entre ellos de la siguiente manera:

$$90° \;\text{———————}\; 100^G$$

$$72° \;\text{———————}\; x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{72° \;.\; 100^G}{90°} \quad \Rightarrow \quad x = 80$$

El ángulo $\hat{\delta} = \; 40^G$, está dado en sistema centesimal. Expresar su medida en sistema sexagesimal

Usaremos la misma equivalencia que usamos en el caso anterior registrando los datos que se tienen y la incógnita en el siguiente planteo:

$$100^G \;\text{———————}\; 90°$$

$$40^G \;\text{———————}\; x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{90° \;.\; 40^G}{100^G} \quad \Rightarrow \quad x = 36°$$

CONSOLIDACION DE CONCEPTOS 1.II
Unir cada medida de los ángulos de la izquierda con su equivalente en el otro sistema que figura a la derecha.

$\hat{\varepsilon} = 212^G$

$\hat{\mu} = 315^\circ$

$\hat{\sigma} = 15{,}5^G$

$\hat{\theta} = 350^G$

$\hat{\varphi} = 13^\circ 57'$

$\hat{\omega} = 190^\circ 48'$

En este sistema de medición, también podemos operar con ángulos, siempre teniendo en cuenta los mismos criterios expresados en su momento que son: trabajar con los bloques de la misma unidad y luego, utilizando la relación existente entre unidades dentro del sistema, escribiremos el resultado en su forma más simplificada.

Por ejemplo: Sea $\hat{\gamma} = 78^G 59'$

Si queremos duplicarlo, deberíamos hacer el producto $2\,.\hat{\gamma} = 2\,.\,(78^G 59')$ esto resulta en lo siguiente: $2\,.\hat{\gamma} = 2\,.\,\left(78^G 59'\right) = 156^G 118' \;=\; 157^G 8'$

Puesto que, como se indicó, por cada $100'$ se forma un grado centesimal mas, entonces el ángulo resultante no ha quedado como: $157^G 8'$

Ahora pasaremos a sumar los siguientes dos ángulos:

Sean $\hat{\alpha} = 214^G 26'$ y $\hat{\beta} = 102^G 19'$

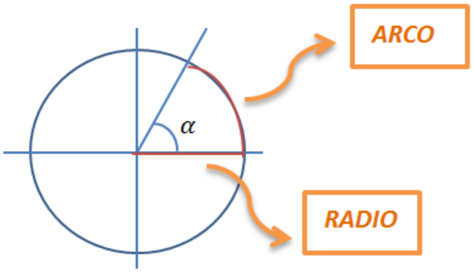
Hacer la suma entre ellos, significa hacer: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 214^G 26' + 102^G 19' = 316^G 45'$

Hacer la resta entre ellos, significa hacer: $\hat{\alpha} - \hat{\beta} = 214^G 26' - 102^G 19' = 112^G 7'$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.III
Siendo $\hat{\alpha} = 56^G\, 31'$ y $\hat{\beta} = 21^G 85'$ Calcular: a) $3\,.\,\hat{\beta} + 38^G 68'$ b) $\hat{\alpha} - 48^G 26'$ c) $2\,.\,\hat{\beta} + \hat{\alpha}$

Ahora pasaremos a estudiar el tercer sistema de medición de ángulos, conocido como **“SISTEMA CIRCULAR O RADIAL”.**

En este sistema la unidad es el RADIAN. Diremos que un ángulo $\hat{\alpha}$ mide 1 RADIAN si su arco es igual al radio de la circunferencia en la que se encuentra inscripto.



Como se observa en la figura, el ARCO es igual al RADIO, entonces el ángulo mide 1 RADIAN

Ahora bien, el perímetro de la circunferencia se calcula de la siguiente manera:

$$Perímetro = 2\,.\,\pi\,.r$$

Concluimos, entonces, que en un giro completo se encuentran 2π ángulos de 1 radián (dicho de manera muy grosera serían $6{,}28$ ángulos de 1 radián, obviamente con la aclaración que el número π es un irracional y su valor no es $3{,}14$ sino un número con infinitas cifras decimales no periódicas. El ejemplo se hizo para dar una interpretación gráfica de la definición)

Continuando con el razonamiento, la equivalencia sería que:

$$360° \sim 400^G \sim 2\pi\ rad$$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 1.IV

1. Escribir cada ángulo en los otros dos sistemas:

$$\hat{\mu} = 120° \quad ; \qquad \hat{\sigma} = 247{,}5^G \; ; \qquad \hat{\varepsilon} = \frac{3}{4}\pi\ rad$$

2. Unir cada medida de los ángulos de la izquierda con su equivalente en el otro sistema que figura a la derecha.

$\hat{\rho} = 166{,}67^G$

$\hat{\omega} = 218°42'$

$\hat{\varepsilon} = \frac{3}{4}\pi\, rad$

$\hat{\gamma} = 243^G$

$\hat{\delta} = 135°$

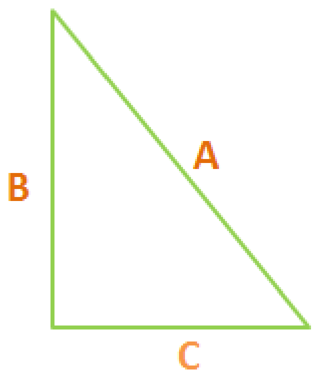
$\hat{\mu} = 1{,}215\,\pi\, rad$

$\hat{\eta} = \frac{5}{6}\pi\, rad$

2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Dado un triángulo rectángulo, como el de la figura, conocemos el teorema que relaciona las longitudes de sus tres lados. Estamos hablando del **TEOREMA DE PITAGORAS,** cuyo enunciado dice: "El cuadrado de la longitud de la hipotenusa, en un triángulo rectángulo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos".

En símbolos y observando el triángulo de la figura, quedaría lo siguiente:

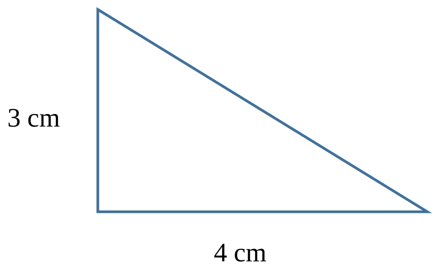


$$\boxed{A^2 = B^2 + C^2}$$

Este teorema es una herramienta muy importante al momento de calcular medidas que no conocemos, de lados de un triángulo rectángulo, conociendo algunos datos, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 3cm y 4cm respectivamente. Hacer la representación gráfica de la situación.

Si hacemos un boceto de la situación (cosa que es siempre muy recomendable), nos quedaría el siguiente gráfico con los datos conocidos…



Por teorema de Pitagoras, se sabe que:

Es decir, la longitud de la hipotenusa buscada es de 5 cm

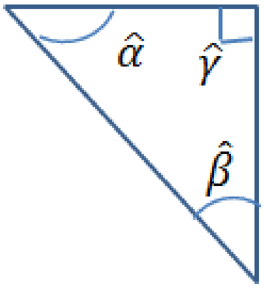
CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 2.I
1) En un triángulo rectángulo, se sabe que la hipotenusa mide 8,5cm y uno de los catetos mide 7cm. ¿Cuánto medirá el otro cateto? **2)** Una escalera de 3m de altura tiene un extremo apoyado al piso y el otro apoyado a la pared. Éste último se apoya sobre la pared a una altura de 2,2m. ¿A qué distancia de la pared se encuentra el extremo apoyado sobre el piso?

Conocer este teorema nos permite calcular lados faltantes en un triángulo rectángulo con los datos que nos dan.

Este procedimiento de encontrar datos faltantes en un triángulo, se conoce como “Resolución de triángulos”. Es decir: “Resolver” un triángulo significa encontrar datos faltantes, a partir de los conocidos.

Otra característica conocida de los triángulos en general y de los triángulos rectángulos en particular que nos va a servir para poder resolver triángulos es, que la *suma de sus ángulos interiores siempre dá 180°*

Es decir:



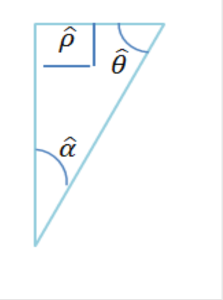
Sabemos que:

Por ser triángulo rectángulo, el ángulo

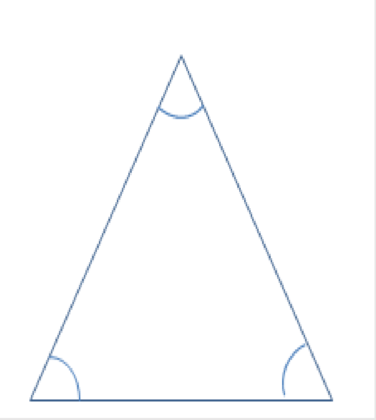
Entonces resulta que:

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 2.II

1) Calcular la amplitud del ángulo $\hat{\theta}$, sabiendo que el triángulo es rectángulo en $\hat{\rho}$ y que $\hat{\alpha} = 25°15´$. La amplitud hallada, expresarla en los otros dos sistemas de medición de ángulos.

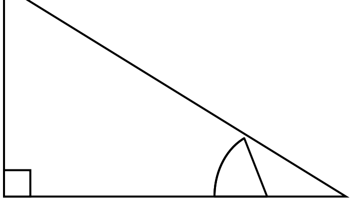


2) En el triángulo isósceles de la figura, se sabe que cada ángulo de la base mide $27°10´$. Calcular el ángulo opuesto a la base del triángulo.



Ahora definiremos relaciones que vinculan dos de los lados de un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos agudos.

Construimos, entonces, sobre un ángulo agudo un triángulo rectángulo ABC, como muestra la siguiente figura:



Vamos a definir las tres razones trigonometricas fundamentales que son:

$$\text{seno de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{longitud de la hipotenusa}} \Leftrightarrow sen\,\hat{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\text{coseno de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{\alpha}}{\text{longitud de la hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos\hat{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\text{tangente de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{\alpha}} \Leftrightarrow tg\,\hat{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Existen tres razones trigonométricas, denominadas secundarias, que son las inversas de las que se acaban de explicar y son:

$$\text{cotangente de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{\alpha}}{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{\alpha}} \Leftrightarrow ctg\,\hat{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

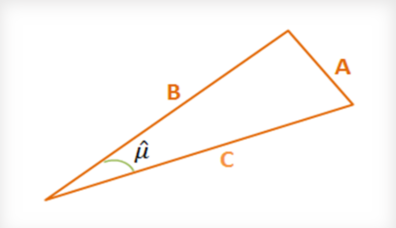
$$\text{secante de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{\alpha}} \Leftrightarrow \sec\hat{\alpha} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\text{cosecante de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{\alpha}} \Leftrightarrow \cos ec\,\hat{\alpha} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

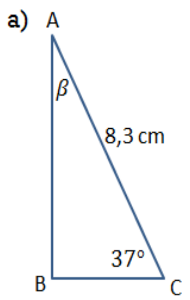
Notemos que la razón trigonométrica surge de la división entre dos magnitudes de la misma especie, por lo cual ***su resultado es un número abstracto***.

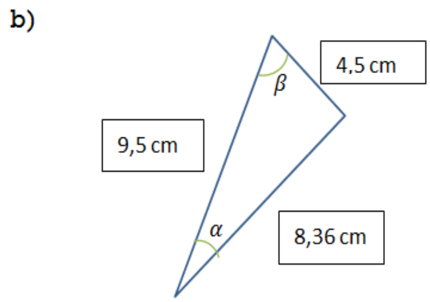
También puede observarse que cada una de las razones trigonométricas secundarias es la inversa multiplicativa de una de las fundamentales. Es decir:

$$cotg\ \hat{\alpha} = \frac{1}{tg\ \hat{\alpha}} \quad ; \quad Sec\ \hat{\alpha} = \frac{1}{cos\ cos\ \hat{\alpha}} \quad ; \quad cosec\ \hat{\alpha} = \frac{1}{Sen\ \hat{\alpha}}$$

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 2.III
1) Para el triangulo de la figura y con los datos dados, calcular a. $tg\ \hat{\mu}$ b. longitud de la hipotenusa c. $sen\ \hat{\mu}$ d. $cos\ \hat{\mu}$ e. $\hat{\mu}$  $\bar{A} = 2cm$ $\bar{B} = 5{,}3cm$

2) Con los datos que se tienen, calcular los elementos faltantes en los siguientes triángulos



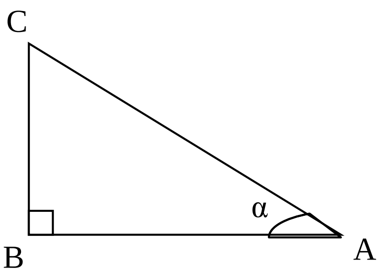


3) Una escalera de 3 metros de largo, tiene un extremo apoyado en la pared. Forma, con el piso, un ángulo de 29°. Calcular a qué altura de la pared se apoya el extremo superior de la escalera y a qué distancia de la pared (sobre el piso) se encuentra el otro extremo de la escalera.

4) Cuando los rayos forman con el piso, un ángulo de 23°, un árbol proyecta una proyecta una sombra cuya longitud es de 4,3 metros. ¿Cuál es la altura del árbol?

3 RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL MISMO ÁNGULO

Volvamos nuestra atención al dibujo del triángulo rectángulo sobre el cual hemos definido las razones trigonométricas…



Recordemos que $\sin\hat{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ y que $\cos\hat{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

<u>Primera relación</u>: La tangente de un ángulo se calcula haciendo el cociente entre el Seno y el coseno de dicho ángulo.

$$\frac{\sin\hat{\alpha}}{\cos\hat{\alpha}} = \frac{\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}}{\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = tg\hat{\alpha}$$

<u>Segunda relación</u>: esta relación es conocida como la "Relación fundamental" de la trigonometría y enuncia que para todo ángulo se verifica que la suma del seno al cuadrado más el coseno al cuadrado da siempre uno. En símbolos:

$$(sen\ \hat{\alpha})^2 + (cos\ \hat{\alpha})^2 = 1$$

Vamos a probar esta afirmación:

$$(sen\ \hat{\alpha})^2 + (cos\ \hat{\alpha})^2 = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)^2 = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2}{\left(\overline{AC}\right)^2}$$

Por teorema de Pitágoras, la suma de los catetos al cuadrado es la hipotenusa al cuadrado, entonces la expresión anterior queda:

$$(sen\ \hat{\alpha})^2 + (cos\ \hat{\alpha})^2 = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)^2 = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2}{\left(\overline{AC}\right)^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AC}^2} = 1$$

Siguiendo el objetivo de encontrar datos faltantes en un triángulo mostraremos con un ejemplo que, utilizando estas relaciones, podemos calcular *<u>TODAS</u>* las razones trigonométricas de un mismo ángulo, solo conociendo una de ellas.

Sabiendo que el $Sen\ \hat{\alpha} = 0{,}257$, calcular las demás razones trigonométricas del ángulo

Comenzamos utilizando la relación fundamental, por lo cual planteamos que

$$(Sen\ \hat{\alpha})^2 + (cos\ cos\ \hat{\alpha})^2 = 1 \Rightarrow (0{,}257)^2 + (cos\ cos\ \hat{\alpha})^2 = 1 \Rightarrow 0{,}066 + (cos\ cos\ \hat{\alpha})^2 = 1$$

$$(cos\ cos\ \hat{\alpha})^2 = 1 - 0{,}066 \Rightarrow (cos\ cos\ \hat{\alpha})^2 = 0{,}934 \Rightarrow cos\ cos\ \hat{\alpha} = 0{,}966$$

Ahora, usaremos la otra relación que dice que la tangente se calcula haciendo el cociente entre seno y coseno del ángulo

$$tg\ \hat{\alpha} = \frac{Sen\ \hat{\alpha}}{cos\ \hat{\alpha}} \Rightarrow tg\ \hat{\alpha} = \frac{0{,}257}{0{,}966} \Rightarrow tg\ \hat{\alpha} = 0{,}266$$

Hasta aquí hemos logrado obtener las tres razones trigonométricas fundamentales, ahora nos ponemos a buscar las secundarias

$$cotg\ \hat{\alpha} = \frac{1}{tg\ \hat{\alpha}} \Longrightarrow cotg\ \ \hat{\alpha} = \frac{1}{0{,}266} \Rightarrow cotg\ \ \hat{\alpha} = 3{,}759$$

$$Sec\ \hat{\alpha} = \frac{1}{cos\ cos\ \hat{\alpha}} \Rightarrow Sec\ \ \hat{\alpha} = \frac{1}{0{,}966} \Rightarrow Sec\ \hat{\alpha} = 1{,}035$$

$$cosec\ \ \hat{\alpha} = \frac{1}{Sen\ \hat{\alpha}} \Rightarrow cosec\ \ \hat{\alpha} = \frac{1}{0{,}257} \Rightarrow cosec\ \hat{\alpha} = 3{,}891$$

Hemos finalizado obteniendo las 6 razones trigonométricas del ángulo $\hat{\alpha}$, a partir de conocer un solo dato que era $Sen\ \hat{\alpha} = 0{,}257$.

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 3.I
Sabiendo que $cos\ \hat{\beta} = 0{,}421$, calcular las demás razones trigonométricas

4 RELACIONES ENTRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

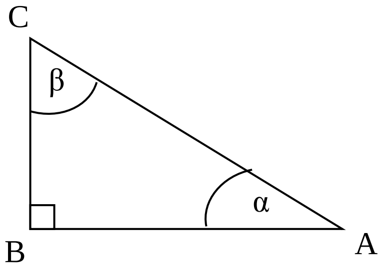
Diremos que dos ángulos son complementarios si sumados dan un ángulo recto, es decir que la suma de sus amplitudes da 90°.

Por ejemplo el complementario de un ángulo $\hat{\alpha} = 37°$ es otro ángulo $\hat{\beta} = 53°$ puesto que

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 37° + 53° = 90°$$

Los ángulos agudos del triángulo rectángulo son complementarios ya que entre los tres ángulos suman 180° y uno de ellos mide 90° por ser recto, entonces la suma de los otros dos es 90°. Vamos a encontrar relaciones entre razones trigonométricas de ángulos complementarios.

Volvamos a la figura original en la que estudiamos las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo…



$$\text{sen}\ \hat{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \qquad \text{sen}\ \hat{\beta} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \qquad \cos \hat{\beta} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

$$tg\hat{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \qquad tg\hat{\beta} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$$

Si observamos el cuadro, podemos notar que:

$$i)\ Sen\ \hat{\alpha} = cos\ \hat{\beta} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

$$ii)\ cos\ \hat{\alpha} = Sen\ \hat{\beta} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$iii)\ tg\ \hat{\alpha} = \frac{1}{tg\ \hat{\beta}} = cotg\ \hat{\beta} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

En lenguaje coloquial podríamos decir que el seno de un ángulo es el coseno de su complementario, el coseno de un ángulo es el seno de su complementario y la tangente de un ángulo es la cotangente de su complementario.

CONSOLIDACIÓN DE CONCEPTOS 4.I
1) En la actividad anterior hemos dicho que $cos\ \hat{\beta} = 0{,}421$ y pudimos calcular las demás razones trigonométricas del ángulo $\hat{\beta}$. Agregamos, ahora que $\hat{\delta}$ es complementario de $\hat{\beta}$, por lo cual nos proponemos calcular todas las razones trigonométricas de $\hat{\delta}$ **2)** Nos informan que: $cos\ \hat{\mu} = 0{,}371$, calcular: $i)\ \frac{cosec\ \hat{\mu} + cotg\ \hat{\mu}}{2} =$ $ii)\ Sen\ (90° - \hat{\mu}) + tg\ (90° - \hat{\mu}) - Sec\ \hat{\mu} =$

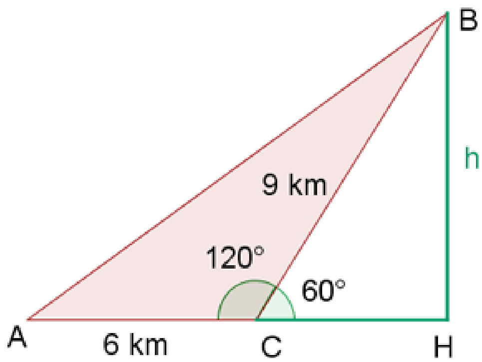
La trigonometría tiene como aplicación fundamental el hecho de resolver problemas de aplicación a través de las herramientas que ella nos proporciona, fundamentalmente en el campo de las ingenierías

Ejercicios de Aplicación

1. Un árbol de 5,2 m de altura proyecta una sombra sobre el piso cuando los rayos de sol forman con la punta del árbol un ángulo de 20°. ¿Cuál será la longitud de la sombra sobre el piso? ¿Qué ángulo formarán los rayos del sol con la línea horizontal?

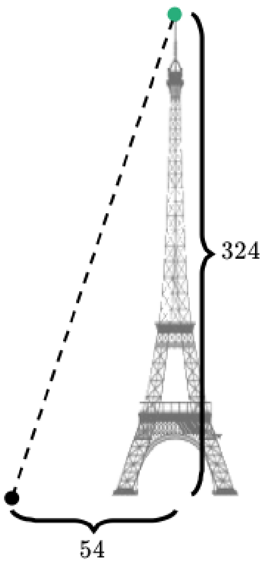
2. Un observador está mirando un globo aerostático en vuelo con un ángulo de elevación de su mirada de 60°. Si se corre hacia atrás 100 metros, lo observa con un ángulo de 30°. ¿A qué altura está volando el globo?

3. Tres ciudades: A, B y C están unidas por carreteras. La distancia de A a C es de 6km y la de B a C es de 9km. El ángulo que forman estas carreteras es de 120° y su disposición es la que muestra el gráfico. ¿A qué distancia se encuentra A de B?



4. Un árbol proyecta sobre el piso una sombra que mide 5,1 metros cuando los rayos del sol forman con la copa del árbol un ángulo de 28°10´. ¿Cuál es la altura del árbol? ¿cuál sería la medida del ángulo mencionado en el problema bajo el sistema centesimal de medición?

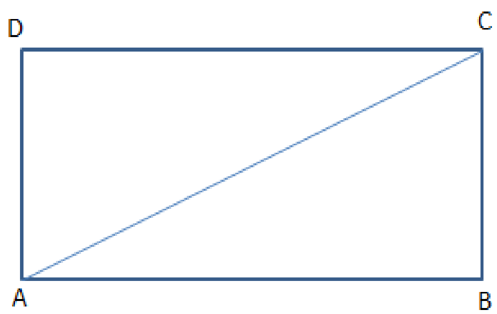
5. Un diminuto extraterrestre está parado en la punta de la Torre Eiffel que tiene 324 metros de altura, amenazando destruir la ciudad de Paris. Un Hombre de Negro está apuntándole su pistola de láser, parado a nivel del piso, a una distancia de 54 metros de la base de la torre. ¿Cuál será el ángulo que debe darle a su disparo para derribar al extraterrestre?



6. El ángulo de elevación de un barrilete, cuando se han soltado 40 m de hilo es 40°. Determinar la altura del barrilete.

7. Desde la cima de un faro de 8 metros de altura, se divisa una lancha con un ángulo de depresión de 8°. Calcular la distancia que separa a la lancha del pie del faro. Calcular con qué ángulo se divisa la cima del faro desde la lancha.

8. En el rectángulo ABCD de la figura, se sabe que $\overline{AB} = 4{,}2\ cm$ y que $\overline{BC} = 1{,}47\ cm$. Calcular la medida de la diagonal $\overline{AC}$ y también el ángulo que ella forma con la base del rectángulo. Expresar el ángulo hallado, en el sistema circular de medición.



9. Un poste de 15 metros de altura es partido por el viento y al caer, el extremo que apoya sobre el piso forma con la horizontal un ángulo $\hat{\alpha} = 19°\ 45´$. Calcular:

a. ¿Cuánto mide la parte que quedó en pie?

b. ¿Cuánto mide la parte que se quebró y tocó el piso?

c. ¿Qué ángulo forma la parte que quedó en pie con la que se cayó?

10. Las ciudades: A y B se encuentran separadas por un río que es imposible cruzar. Para medir la distancia que las separa se las observa desde un globo aerostático que sobrevuela a 2300 metros de altura con un ángulo de depresión de 17°32´para la ciudad A y de 41°28´ para la ciudad B. Calcular la distancia entre las dos ciudades y expresar los ángulos mencionados en el sistema circular de medición.

11. Una rampa de 7,3 metros de largo forma con el piso un ángulo de 15°43´. ¿Cuál es la altura de la rampa?

12. Del romboide de la figura se tienen los siguientes datos: $\overline{AB} = 5{,}4\ cm$ y $\overline{\mathrm{BD}} = 7{,}4\ cm$. Además, sabemos que el lado $\overline{EC}$ es el doble de largo que el lado $\overline{AE}$. Calcular:

a. La medida del lado $\overline{BC}$, de la diagonal mayor $\overline{AC}$ y de los cuatro ángulos interiores del romboide.

b. Perímetro de la figura

c. Superficie total del romboide